# *Programme de colle S7*

## Notions au programme

- **Chapitre 4, Suites et séries de fonctions :** *en totalité.*

## Démonstrations à connaître

### Étage 1 / Poussin

- **[Ch4 §I.3]** La convergence uniforme entraîne la convergence simple.
- **[Ch4 §III.2]** Caractérisation de la convergence uniforme d'une série de fonctions par la convergence uniforme des restes
- **[Ch4 §IV.2]** Continuité de la somme d'une série de fonctions.

### Étage 2 / Poulet

- **[Ch4 §II.2]** Théorème d'interversion limite / intégrale sur un segment.
- **[Ch4 §III.3]** La convergence normale entraîne la convergence simple et la convergence uniforme.
- **[Ch4 §III.3]** Conditions nécessaires pour la convergence uniforme d'une série de fonctions.

### Étage 3 / Super-Poulet

- **[Ch4 §II.1]** Théorème de continuité de la fonction limite.
- **[Ch4 §II.3]** Théorème de dérivabilité de la fonction limite.

## Exercices à savoir refaire

### Suites et séries de fonctions

- **[Exercice 3]** Majoration d'une norme infinie par manipulations d'inégalités.
- **[Exercice 10]** Modes de convergence de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ pour $f_n : x \mapsto \dfrac{n\,x^2+1}{n\,x+1}$.
- **[Exercice 14]** Modes de convergence de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ et $(f_n')_{n\geqslant 1}$ pour $f_n : x \mapsto \sqrt{1+\frac{1}{n}}$.
- **[Exercice 16]** Convergence uniforme d'une série de fonctions alternées qui ne converge pas normalement
- **[Exercice 21]** Limites en $+\infty$ de deux sommes de séries de fonctions.
- **[Exercices 23, 26]** Caractère $\mathscr{C}^1/\mathscr{C}^2$ d'une somme de série de fonctions.
- **[Exercice 27]** Caractère $\mathscr{C}^\infty$ sur $I = ]\,1,+\infty[$ de la fonction $\zeta$ de Riemann

## Compétences attendues

### Révisions d'analyse

- Manipulation d'inégalités : majoration d'un quotient d'expressions positives, application de fonctions monotones
- Étude des variations d'une fonction dérivable sur un intervalle
- Courbes représentatives des fonctions associées

### Suites et séries de fonctions

- Étudier la convergence simple d'une suite de fonctions en fixant la variable $x$ et en faisant tendre $n$ vers l'infini **[→ §I.1, ex. 1, 6, 7, 9, 10]**, au besoin par disjonction de cas sur la variable **[→ ex. 2, 12]**
- Majorer une norme uniforme $\|f\|_\infty^I$ en majorant $|f(x)|$ **[→ §I.2, ex. 3, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14]**
- Déterminer la valeur exacte de $\|f\|_\infty^I$ à l'aide de la courbe de la fonction $f$ **[→ §I.2, ex. 4, ex. 8, ex. 9]**
- Calculer la valeur exacte de $\|f\|_\infty^I$ en étudiant les variations de la fonction $f$ **[→ §I.2, ex. 5, 7, 13 Q2]**
- Prouver la convergence uniforme d'une suite de fonctions sur un intervalle $I$ **[→ §I.3, ex. 6, 7, 8, 10, 11, 12]**, sur tout segment de $I$ **[→ §I.4, ex. 10]**, sur tout segment symétrique quand $I$ est symétrique **[→ §I.4, ex. 11]**
- Nier la convergence uniforme en considérant une suite de points tendant vers une zone où la convergence se fait « mal » **[→ §I.3, ex. 8 Q2, ex. 9, ex 10 Q2]**
- Nier la convergence uniforme en utilisant la non-continuité de la fonction limite **[→ §II.1, ex. 12, ex. 14]**
- Calculer une limite d'intégrales en intervertissant les symboles $\lim\limits_{n\to\infty}$ et $\int_a^b$ **[→ §II.2, ex. 13 Q1]**
- Déterminer le domaine de convergence d'une série de fonctions **[→ §III.1, ex. 15]**

- Prouver la convergence normale d'une série de fonctions **[→ §III.3, ex. 17]**, au besoin sur tout segment **[→ §III.3, ex. 18]**
- Prouver la convergence uniforme d'une série de fonctions qui ne converge pas normalement en utilisant le CSSA **[→ §III.2, ex. 16]**
- Prouver la continuité d'une somme de séries de fonctions **[→ §IV.1, ex. 20]**
- Étudier les limites d'une telle somme aux bornes de son domaine de définition **[→ §IV.1, ex. 21]**
- Dériver terme à terme une somme de séries de fonctions **[→ §IV.3]** : 1 fois **[→ ex. 23, 24, 25]** ; 2 fois **[→ ex. 26]** ; un nombre arbitraire de fois **[→ ex. 27]**