Corrigé du devoir surveillé n° 1 (v2)

Exercice A

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\geqslant 0} u_n := \sum_{n\geqslant 0} \frac{a^n}{n!}$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n := \sum_{n\geqslant 0} \frac{b^n}{n!}$.

1) ∗ **1er cas :** si $a \neq 0$.
On applique la règle de d'Alembert à la série $\sum_{n\geqslant 0} |u_n| = \sum_{n\geqslant 0} \frac{|a|^n}{n!}$.

(H1) Pour tout $n \geqslant 0$, $|u_n| > 0$ **car $a \neq 0$.**

(H2) $\forall\, n \geqslant 0 :\ \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \dfrac{\left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{a^n}{n!}\right|} = \dfrac{|a|^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot |a|^n} = \dfrac{|a|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1.$

La série $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ est donc convergente ; la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

∗ **2e cas :** si $a = 0$. Alors :

$$\forall\, n \geqslant 0 :\quad u_n = \frac{0^n}{n!} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Tous les termes de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ sont nuls à partir du rang 1 : elle est convergente et sa somme vaut $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1$.

Conclusion : Dans tous les cas, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.

2) On reconnait les série exponentielles de paramètres respectifs a et b ; ces séries sont convergentes et leurs sommes valent :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = \mathrm{e}^a \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} = \mathrm{e}^b.$$

3) Par définition, le produit de Cauchy de la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ par la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ est **la série** $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ dont le terme général est donné par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} :\quad w_n = \sum_{\substack{k,\ell\in\mathbb{N}/\\ k+\ell=n}} u_k\, v_\ell = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}.$$

4) Dans notre exemple, pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}\cdot\frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} = \frac{(a+b)^n}{n!}$$

par la formule du binôme de Newton.

Conclusion : Le produit de Cauchy de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ par $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ est la série $\sum_{n\geqslant 0} w_n = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(a+b)^n}{n!}$.

5) Le théorème des produits de Cauchy s'applique aux séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ car ce sont des séries absolument convergentes (H).

En effet, $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ et $\sum_{n\geqslant 0} |v_n|$ sont les séries exponentielles de paramètres $|a|$ et $|b|$, qui sont convergentes d'après **Q1**.

Ce théorème conclut : (C1) que la série $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ est aussi absolument convergente, et (C2) que les trois sommes vérifient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right).$$

Mais d'après **Q4**, $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ est la série exponentielle de paramètre $(a+b)$.
On obtient donc :

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b,$$

qui est la propriété fondamentale de la fonction exponentielle.

Exercice B

1) Par définition des déterminants de Vandermonde :

$$V(-1,3,0,2) = \begin{vmatrix} (-1)^0 & (-1)^1 & (-1)^2 & (-1)^3 \\ 3^0 & 3^1 & 3^2 & 3^3 \\ 0^0 & 0^1 & 0^2 & 0^3 \\ 2^0 & 2^1 & 2^2 & 2^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}.$$

2) Calculons ce déterminant :

$$\begin{aligned}
V(-1,3,0,2) &= +1\cdot\begin{vmatrix}-1&1&-1\\3&9&27\\2&4&8\end{vmatrix} && \text{(développement } L_3\text{)}\\
&= \begin{vmatrix}-1&0&0\\3&12&24\\2&6&6\end{vmatrix} && \begin{matrix}(C_2\leftarrow C_2+C_1\\ C_3\leftarrow C_3-C_1)\end{matrix}\\
&= +(-1)\cdot\begin{vmatrix}12&24\\6&6\end{vmatrix} && \text{(développement } L_1\text{)}\\
&= -12\cdot 6\cdot\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix} && \text{(factorisation } L_1 \text{ et } L_2\text{)}\\
&= -72\cdot(1-2)\\
&= 72.
\end{aligned}$$

3) En notant $(a_0,a_1,a_2,a_3) := (-1,3,0,2)$, la formule du déterminant de Vandermonde donne :

$$\begin{aligned}
V(-1,3,0,2) &= \prod_{0\leqslant j<k\leqslant 3}(a_k-a_j)\\
&= (3+1)(0+1)(2+1)(0-3)(2-3)(2-0)\\
&= 4\cdot 3\cdot(-3)\cdot(-1)\cdot 2\\
&= 72.
\end{aligned}$$

Exercice C

1) Le théorème d'interpolation de Lagrange est le suivant.
« Soit $n\in\mathbb{N}$, $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{K}$ **tous distincts,** $b_0,\dots,b_n\in\mathbb{K}$ quelconques.
Alors il existe un unique polynôme P_0, de degré au plus n, qui vaut b_j en chaque a_j :

$$\exists!\, P_0\in\mathbb{K}[X]\ /\ \begin{cases}\deg(P_0)\leqslant n\\ \forall\, j\in[\![0,n]\!]:\ P_0(a_j)=b_j.\end{cases}\ \text{»}$$

✿ **Remarque.** Pour passer par $n+1$ points d'abscisses disctinctes (numérotés de 0 à n), on a besoin des polynômes de degré au plus n.

2) Soit $\mathscr{L} := (L_0,\dots,L_n)$ la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange associés à $(a_0,\dots,a_n)$. Alors $\mathscr{L}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
Démontrons ce résultat :

- Par définition de ces polynômes :

$$\forall\, k\in[\![0,n]\!]:\quad L_k(X)=\frac{\prod_{j\neq k}(X-a_j)}{\prod_{j\neq k}(a_k-a_j)}.$$

  On en déduit que les L_k sont tous de degré n exactement, et a fortiori de degré au plus n : les vecteurs de la famille $\mathscr{L}$ sont tous dans $\mathbb{K}_n[X]$.
- $\mathrm{Card}(\mathscr{L})=n+1=\dim\big(\mathbb{K}_n[X]\big)$ donc il suffit désormais de montrer que $\mathscr{L}$ est libre.
- Montrons-le par la définition de cette notion.
  Soit $\alpha_0,\dots,\alpha_n\in\mathbb{K}$; supposons que $\sum_{j=0}^{n}\alpha_j L_j=0$ (le polynôme nul).
  Fixons $k\in[\![0,n]\!]$ et montrons que $\alpha_k=0$.
  Pour cela, on applique les polynômes en a_k :

$$\sum_{j=0}^{n}\alpha_j L_j(a_k)=0.\quad\text{(zéro)}$$

  Comme par construction des L_j : $L_j(a_k)=\begin{cases}0 & \text{si } k\neq j,\\ 1 & \text{si } k=j,\end{cases}$ on obtient :

$$0+\cdots+0+\alpha_k+0+\cdots+0=0,\quad\text{puis}\quad\alpha_k=0.$$

3) On interpole désormais aux points $a=-1$, $b=0$ et $c=1$.
Les polynômes interpolateurs de Lagrange associés sont :

$$\begin{aligned}
L_0(X)&=\frac{(X-0)(X-1)}{(-1-0)(-1-1)}=\frac{1}{2}X(X-1),\\
L_1(X)&=\frac{(X+1)(X-1)}{(0+1)(0-1)}=-(X+1)(X-1),\\
L_2(X)&=\frac{(X+1)(X-0)}{(1+1)(1-0)}=\frac{1}{2}X(X+1).
\end{aligned}$$

4) On cherche une parabole dont la courbe passe par les points $A=(-1,2)$, $B=(0,-1)$ et $C=(1,3)$.
Il s'agit donc de trouver un polynôme P_0 de degré 2 vérifiant :

$$P_0(-1)=2,\quad P_0(0)=-1\quad\text{et}\quad P_0(1)=3.$$

Le théorème d'interpolation de Lagrange affirme que parmi les polynômes de degré au plus 2, il en existe un unique qui vérifie cela. Il s'exprime en fonction des polynômes de Lagrange :

$$P_0(X)=2\cdot L_0(X)-L_1(X)+3\,L_2(X)$$

$$= 2\cdot\tfrac{1}{2}X(X-1)+(X+1)(X-1)+3\cdot\tfrac{1}{2}X(X+1)$$
$$= \left(1+1+\tfrac{3}{2}\right)X^2+\left(-1+\tfrac{3}{2}\right)X+(-1)$$
$$= \tfrac{7}{2}X^2+\tfrac{1}{2}X-1.$$

Conclusion : L'unique parabole dont la courbe passe par les points A, B et C a pour équation $y=\frac{7}{2}x^2+\frac{1}{2}x-1$.

Exercice D

Soit $M=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1) a. On cherche les polynômes annulateurs unitaires, de degré 2 de M.
Prenons $P=X^2+aX+b\in\mathbb{R}[X]$ **quelconque.**
Raisonnons par analyse-synthèse :

- **Analyse :** supposons que P annule M.
Alors : $P(M)=0_3$, donc $M^2+aM+b\,\mathrm{I}_3=0_3$.
Mais :
$$M^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&2&2\\4&3&2\\4&2&3\end{pmatrix},$$
donc on obtient :
$$\begin{pmatrix}5&2&2\\4&3&2\\4&2&3\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=0_3.$$
En observant les coefficients en position $(3,2)$, il vient $2+a=0$, et en position $(2,2)$, $3+b=0$.
Ainsi $a=-2$ et $b=-3$, donc $P=X^2-2X-3$.
Le seul polynôme unitaire de degré au plus 2 qui peut annuler M est $P:=X^2-2X-3$.
- **Synthèse.** On ne suppose plus que P annule M et on examine $P=X^2-2X-3$. Regardons s'il annule M :
$$P(M)=M^2-2M-3\,\mathrm{I}_3$$
$$=\begin{pmatrix}5&2&2\\4&3&2\\4&2&3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$
Le polynôme P est bien un polynôme annulateur de M.

Conclusion : La matrice M admet un unique polynôme annulateur unitaire de degré 2 : c'est $P=X^2-2X-3$.

b. Comme P est annulateur de M :
$$M^2-2M-3\,\mathrm{I}_3=0_3 \quad\text{donc}\quad M^2-2M=3\,\mathrm{I}_3$$
$$\text{puis}\quad M\times\tfrac{1}{3}(M-2\,\mathrm{I}_3)=\tfrac{1}{3}(M-2\,\mathrm{I}_3)\times M=\mathrm{I}_3.$$

Conclusion : La matrice M est inversible, et $M^{-1}=\frac{1}{3}(M-2\,\mathrm{I}_3)$.

c. Fixons $n\in\mathbb{N}$. Par division euclidienne de X^n par P, **il existe un unique** couple (Q_n,R_n) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que :
$$\begin{cases}X^n=P(X)Q_n(X)+R_n(X),\\ \deg(R_n)<\deg(P)=2.\end{cases}$$
Puisque $\deg(R_n)\leqslant 1$, **il existe** deux réels a_n et b_n tels que $R_n(X)=a_nX+b_n$ et alors :
$$X^n=P(X)Q_n(X)+a_nX+b_n. \qquad (*)$$
En évaluant $(*)$ en la matrice M :
$$M^n=\overbrace{P(M)}^{=0_3}Q_n(M)+a_nM+b_n\,\mathrm{I}_3$$
$$=a_nM+b_n\,\mathrm{I}_3.$$

Conclusion : Pour tout entier $n\geqslant 0$, il existe un couple $(a_n,b_n)\in\mathbb{R}^2$ tel que $M^n=a_nM+b_n\,\mathrm{I}_3$.

d. ∗ Le polynôme $P=X^2-2X-3$ a pour racine évidente $x_1:=-1$. Le produit de ses racines vaut $-3/1=-3$, donc l'autre racine est $x_2:=3$:
$$P(X)=(X+1)(X-3).$$

∗ En évaluant $(*)$ en -1 et en 3 :
$$\begin{cases}-a_n+b_n=(-1)^n\\ 3a_n+b_n=3^n\end{cases}$$
On en tire :
$$(\mathrm{L}_1-\mathrm{L}_2)\quad -4a_n=(-1)^n-3^n \quad\text{d'où}\quad a_n=\tfrac{1}{4}\left(-(-1)^n+3^n\right),$$
$$(3\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2)\quad 4b_n=3(-1)^n+3^n \qquad\qquad b_n=\tfrac{1}{4}\left(3(-1)^n+3^n\right),$$

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N},\ M^n=\frac{1}{4}\left[\left(-(-1)^n+3^n\right)M+\left(3(-1)^n+3^n\right)\mathrm{I}_3\right]$.

2) **a.** Cherchons deux vecteurs non colinéaires de $\mathrm{Ker}(M+I_3)$:

dans $M+\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$: $\quad \mathrm{C}_1 - 2\,\mathrm{C}_2 = 0_{3,1}$ $\quad$ donc $V_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(M+\mathrm{I}_3)$;

$\mathrm{C}_2 - \mathrm{C}_3 = 0_{3,1}$ $\quad$ donc $V_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(M+\mathrm{I}_3)$.

Ces vecteurs V_1 et V_2 ne sont pas colinéaires. De même,

dans $M-3\,\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$: $\quad \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3 = 0_{3,1}$

$\quad$ donc $\quad V_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(M-3\,\mathrm{I}_3)$.

b. Soit $P := \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \end{pmatrix}$. Cherchons à l'inverser par la méthode du miroir de Gauss-Jordan :

$$\left[\begin{array}{c|c} P & \mathrm{I}_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\mathrm{L}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \textbf{Élimination } \mathbf{C_1} \downarrow \quad \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + 2\,\mathrm{L}_1$$

$$\underset{\mathrm{L}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \textbf{Élimination } \mathbf{C_2} \downarrow \quad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2$$

$$\underset{\mathrm{L}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \textbf{Préparation } \mathbf{C_3} \uparrow \quad \mathrm{L}_1 \leftarrow 4\,\mathrm{L}_3 \quad \mathrm{L}_2 \leftarrow 4\,\mathrm{L}_2$$

$$\underset{\mathrm{L}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \textbf{Élimination } \mathbf{C_3} \uparrow \quad \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3 \quad \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 3\,\mathrm{L}_3$$

Conclusion : La matrice P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c. Pour calculer $P^{-1}\,M\,P$, on pose le produit de matrices :

$$\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve : $P^{-1}\,M\,P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

La matrice obtenue est diagonale.

✿ **Remarque.** Ce n'est pas une surprise ! En effet, M est la matrice dans la base canonique de l'endomorphisme $f : V \mapsto M\,V$ de $\mathbb{R}^3$.
Comme P est inversible, la famille (V_1, V_2, V_3) est une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^3$, et P est la matrice de passage de $\mathscr{B}_{\text{can}}$ à $\mathscr{B}'$.
La formule de changement de base nous dit que $P^{-1}\,M\,P$ est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.
Mais comme $V_1, V_2 \in \mathrm{Ker}(M+\mathrm{I}_3)$, f envoie V_1 sur $-V_1$, et V_2 sur $-V_2$; puisque $V_3 \in \mathrm{Ker}(M-3\,\mathrm{I}_3)$, f envoie V_3 sur $3\,V_3$.
La matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ est donc $\mathrm{diag}(-1,1,3)$: on retrouve le résultat obtenu par le calcul.

Exercice E

On travaille dans $E = \mathbb{R}^3$ où l'on considère les vecteurs :

$$V_1 := \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},\ V_2 := \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix},\ V_3 := \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix},\ V_4 := \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \\ 9 \end{bmatrix},$$

et la famille $\mathscr{F} := (V_1, V_2, V_3, V_4)$.

1) Puisque $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = 4 > 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$:

- la famille $\mathscr{F}$ ne peut pas être libre (elle est liée)
- donc elle ne peut pas être une base de $\mathbb{R}^3$.
- En revanche, on ne peut pas dire sans calcul si $\mathscr{F}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

2) Calculons le rang de $\mathscr{F}$ à l'aide de sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}\left(\underset{\mathscr{B}_{\text{can}}}{\mathrm{mat}}(\mathscr{F})\right) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 & -4 \\ 3 & -3 & -4 & -7 \\ 4 & 5 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & 9 & -13 & -19 \\ 0 & 21 & -7 & -7 \end{pmatrix} \quad (\text{élimination } \mathrm{C}_1 \downarrow)$$

$$= 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 9 & -13 & -19 \\ 21 & -7 & -7 \end{pmatrix}. \quad (-1 \text{ était seul dans } \mathrm{C}_1)$$

Cette dernière matrice comporte exactement 2 lignes, **qui sont non proportionnelles :** elle est donc de rang 2. Finalement :

$$\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = 1+2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3),$$

donc la famille $\mathscr{F}$ est effectivement génératrice de $\mathbb{R}^3$.

✿ **Remarque.** Il y avait en fait une coquille dans l'énoncé : le vecteur V_1 initialement prévu était $V_1 := (-1,-\mathbf{3},4)$. Vous trouverez un rang différent avec ce vecteur !

♠ **Rappel** Quelques repères importants concernant le rang :

1) Si un coefficient est seul dans une rangée (ligne ou colonne), on peut éliminer la ligne **et** la colonne de ce coefficient (les deux, comme lorsqu'on développe un déterminant selon une rangée) et ajouter 1.

2) Le rang d'une famille de vecteurs de E ne peut pas dépasser son nombre de vecteurs, ni la dimension de l'espace E.

3) Les cas d'égalité caractérisent les familles libre/génératrices :

$$\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{Card}(\mathscr{F}) \iff \mathscr{F} \text{ est libre}, \qquad \mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \dim(E) \iff \mathscr{F} \text{ engendre } E.$$

3) Puisque $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = 3$, les sous-familles libres de $\mathscr{F}$ comportent au maximum 3 vecteurs. Voyons si $\mathscr{F}' := (V_1, V_2, V_3)$ est libre. On calcule son rang comme dans la question précédente, en supprimant juste la 4e colonne : on trouve $\mathrm{rg}(\mathscr{F}') = 3$.
Puisque $\mathrm{rg}(\mathscr{F}') = 3 = \mathrm{Card}(\mathscr{F}')$, cette famille est bien libre.

Conclusion : La famille $\mathscr{F}' = (V_1, V_2, V_3)$ est une sous-famille libre de $\mathscr{F}$ de cardinal maximal.

✿ **Remarque.** Sur cet exemple, toutes les sous-familles de $\mathscr{F}$ comportant 3 vecteurs sont libres et répondent à la question. Ce n'est pas une règle générale !

4) On vient de voir que $\mathscr{F}'$ était libre ; de plus, elle comporte 3 vecteurs dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, qui est de dimension 3. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Conclusion : Il n'est pas nécessaire de compléter $\mathscr{F}'$ en une base de $\mathbb{R}^3$... puisque c'en est déjà une !

✿ **Remarque.** Cette question est bizarre à cause de l'erreur d'énoncé. Mais elle était traitable quand même !

Exercice F

Soit $M \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure par blocs définie par :

$$M = \begin{bmatrix} A & C \\ 0_n & B \end{bmatrix}, \quad \text{où } A, B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

- Puisque M est une matice triangulaire supérieure par blocs :

$$\det(M) = \det\begin{bmatrix} A & C \\ 0_n & B \end{bmatrix} = \det(A) \times \det(B).$$

On peut ainsi écrire la chaîne d'équivalences :

$$\begin{aligned} & M \text{ est inversible} \\ \iff & \det(M) \neq 0 \\ \iff & \det(A) \times \det(B) \neq 0 \\ \iff & \det(A) \neq 0 \ \underline{\textbf{et}} \ \det(B) \neq 0 \qquad \text{(règle du produit nul dans } \mathbb{K}) \\ \iff & A \text{ et } B \text{ sont inversibles.} \end{aligned}$$

- **Supposons désormais M inversible.**
D'après le point précédent, cela revient à supposer les matrices A et B inversibles.
Cherchons une écriture de M^{-1}. Pour cela, on la découpe en blocs de même taille que ceux de M :

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix} \quad \text{où } X, Y, Z, T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

On sait que $M \times M^{-1} = \mathrm{I}_{2n}$; mais on a également :

$$M \times M^{-1} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0_n & B \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX + CZ & AY + CT \\ BZ & BT \end{bmatrix},$$

donc en rapprochant les deux : $\begin{bmatrix} AX + CZ & AY + CT \\ BZ & BT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & 0_n \\ 0_n & \mathrm{I}_n \end{bmatrix}$.

En identifiant les blocs de la deuxième ligne : $BZ = 0_n$ et $BT = \mathrm{I}_n$.
Rappelons que B est inversible ; en multipliant à gauche par B^{-1} :

$$Z = 0_n \quad \text{et} \quad T = B^{-1}.$$

En identifiant les blocs restants : $AX + 0_n = \mathrm{I}_n$ et $AY + CB^{-1} = 0_n$.
Puisque A est inversible également :

$$X = A^{-1} \quad \text{puis} \quad Y = -A^{-1}CB^{-1}.$$

Conclusion : La matrice M est inversible *si et seulement si* A et B le sont. Quand c'est le cas :

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0_n & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0_n & B^{-1} \end{bmatrix}.$$

Exercice G

Développements limités usuels à l'ordre 4

► **Famille de $\frac{1}{1-x}$:**

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^4+\underset{x\to0}{o}\left(x^4\right) \qquad \text{(calcul de la somme géométrique } \textstyle\sum_{k=0}^{n} x^k\text{)}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+x^4+\underset{x\to0}{o}\left(x^4\right) \qquad (x \leftarrow -x \text{ dans } \tfrac{1}{1-x})$$

$$\ln(1+x) = x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^4+\underset{x\to0}{o}\left(x^4\right) \qquad (\text{primitive de } x\mapsto\tfrac{1}{1+x})$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4+\underset{x\to0}{o}\left(x^4\right) \qquad (x \leftarrow x^2 \text{ dans } \tfrac{1}{1+x})$$

$$\arctan x = x-\tfrac{1}{3}x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^4\right) \qquad (\text{primitive de } x\mapsto\tfrac{1}{1+x^2})$$

► **Exposants :** pour tout exposant $\alpha\in\mathbb{R}$ **constant,**

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x^4+\underset{x\to0}{o}\left(x^4\right) \qquad \text{(formule de Taylor-Young)}$$

► **Famille de l'exponentielle :**

$$e^x = 1+x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3!}x^3+\tfrac{1}{4!}x^4+\underset{x\to0}{o}\left(x^4\right) \qquad \text{(formule de Taylor-Young)}$$

$$\mathrm{ch}(x) = 1+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{4!}x^4+\underset{x\to0}{o}\left(x^4\right) \qquad \text{(partie paire de exp)}$$

$$\mathrm{sh}(x) = x+\tfrac{1}{3!}x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^4\right) \qquad \text{(partie impaire de exp)}$$

$$\cos(x) = 1-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{4!}x^4+\underset{x\to0}{o}\left(x^4\right) \qquad \text{(idem ch, mais alterné)}$$

$$\sin(x) = x-\tfrac{1}{3!}x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^4\right) \qquad \text{(idem sh, mais alterné)}$$

$$\tan(x) = x+\tfrac{1}{3}x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^4\right) \qquad \text{(quotient sin / cos)}$$

♠ **Attention !** Pour éviter les erreurs :

- **Toujours évaluer le DL en $x=0$.** Cela évite de se tromper sur le terme constant du DL. *Exemple : en $x=0$, $\ln(1+x)=0$ donc les DL de $\ln(1+x)$ ne peuvent pas commencer par 1.*
- **Utiliser la parité des fonctions.** *Exemple : la fonction* sin *est impaire, donc ses DL ne comportent que des exposants impairs.*
- **Savoir d'où viennent ces DL,** pour pouvoir les retrouver rapidement et sans erreur en cas de doute.

DS n° 1b : Problèmes

Problème 1

Séries de Bertrand

Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant2}u_n := \sum_{n\geqslant2}\frac{1}{n^\alpha\ln^\beta(n)}$.

1) a. Si $(\alpha,\beta)=(1,-1)$, alors $u_n=\dfrac{\ln(n)}{n}$ et (H1) $\dfrac{1}{n}=\underset{n\to\infty}{o}(u_n)$ puisque :

$$\forall n\geqslant2:\quad \frac{\frac{1}{n}}{u_n}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{\ln(n)}{n}}=\frac{1}{\ln(n)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

De plus, (H2) $\forall n\geqslant2,\ u_n>0$
et (H3) $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n}$ est divergente (série harmonique).
Par théorème de comparaison, $\displaystyle\sum_{n\geqslant2}u_n$ est divergente.

b. Si $(\alpha,\beta)=(2,-2)$, alors $u_n=\dfrac{\ln^2(n)}{n^2}$ et (H1) $u_n=\underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ puisque :

$$\forall n\geqslant2:\quad \frac{u_n}{\frac{1}{n^{3/2}}}=\frac{\frac{\ln^2(n)}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}}=\frac{\ln^2(n)}{\sqrt{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{\text{CC}}0.$$

De plus, (H2) $\forall n\geqslant2,\ \frac{1}{n^{3/2}}>0$
et (H3) $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n^{3/2}}$ est convergente (série de Riemann d'exposant $\alpha=3/2>1$).
Par théorème de comparaison, $\displaystyle\sum_{n\geqslant2}u_n$ est convergente.

c. Si $(\alpha,\beta)=\left(\frac{1}{2},\ 3\right)$, alors $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}\ln^3(n)}$ et (H1) $\dfrac{1}{n}=\underset{n\to\infty}{o}(u_n)$ puisque :

$$\forall n\geqslant2:\quad \frac{1/n}{u_n}=\frac{1/n}{1/\left(\sqrt{n}\ln^3(n)\right)}=\frac{\ln^3(n)}{\sqrt{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{\text{CC}}0.$$

De plus, (H2) $\forall n\geqslant2,\ u_n>0$
et (H3) $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n}$ est divergente (série harmonique).
Par théorème de comparaison, $\displaystyle\sum_{n\geqslant2}u_n$ est divergente.

2) Supposons que $\alpha > 1$.

Prenons un exposant $\gamma \in]1, \alpha[$ et constatons que (H1) $u_n = \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$:

$$\forall n \geqslant 2 : \quad \frac{u_n}{\frac{1}{n^\gamma}} = \frac{\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}}{\frac{1}{n^\gamma}} = \frac{1}{n^{\alpha-\gamma}\ln^\beta(n)}.$$

Puisque $\alpha - \gamma > 0$: $n^{\alpha-\gamma} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. De plus :

$$\ln^\beta(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta > 0, \\ 1 & \text{si } \beta = 0, \\ 0 & \text{si } \beta < 0. \end{cases}$$

Dans tous les cas, le produit $n^\alpha \ln^\beta(n)$ tendra également vers $+\infty$: par produit de limites dans les cas où $\beta > 0$ ou $\beta = 0$, par croissances comparées si $\beta < 0$. Donc dans tous les cas : $\frac{u_n}{1/n^\gamma} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

De plus, (H2) $\forall n \geqslant 2$, $\frac{1}{n^\gamma} > 0$

et (H3) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\gamma}$ est convergente (série de Riemann d'exposant $\gamma > 1$).

Conclusion : Par théorème de comparaison, $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ est convergente.

3) Supposons maintenant que $\alpha < 1$, et montrons que $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ est divergente.

On a (H1) $\frac{1}{n} = \underset{n\to\infty}{o}(u_n)$ puisque :

$$\forall n \geqslant 2 : \quad \frac{\frac{1}{n}}{u_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}} = \frac{\ln^\beta(n)}{n^{1-\alpha}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

puisque $1 - \alpha > 0$, par opérations sur les limites, et croissances comparées quand $\beta > 0$. De plus, (H2) $\forall n \geqslant 2$, $u_n > 0$ et (H3) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

Conclusion : Par théorème de comparaison, $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ est divergente.

4) Dans le cas où $\alpha = 1$ et $\beta \leqslant 0$:

$$\forall n \geqslant 2 : \quad u_n = \frac{1}{n\ln^\beta(n)} = \frac{1}{n\ln^{-|\beta|}(n)} = \frac{\ln^{|\beta|}(n)}{n}.$$

On en déduit que (H1) $\frac{1}{n} = \underset{n\to\infty}{\mathcal{O}}(u_n)$:

$$\forall n \geqslant 2 : \quad \frac{\frac{1}{n}}{u_n} = \frac{1}{\ln^{|\beta|}(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } \beta < 0, \\ 1 & \text{si } \beta = 0. \end{cases}$$

Comme toute suite convergente est bornée, dans tous les cas, le rapport est borné.

Conclusion : On conclut ensuite comme précédemment que $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ est divergente.

5) On suppose désormais que $\alpha = 1$ et $\beta > 0$.

a. Estimons, par la méthode des rectanges, les sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$:

$$\forall n \geqslant 2 : \quad S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n\ln^\beta(n)}.$$

On introduit la fonction $f : [2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \frac{1}{t\ln^\beta(t)}$.

Cette fonction est continue et décroissante sur $[2, +\infty[$, d'où :

$$\forall k \geqslant 2 : \quad f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k).$$

Prenons $n \geqslant 3$ et sommons cet encadrement pour $k \in [\![2\,;\,n-1]\!]$:

$$\sum_{k=2}^{n-1} f(k+1) \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} f(k)$$

$$S_n - f(2) \leqslant \int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S_n - f(n)$$

$$\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(n) \leqslant S_n \leqslant \int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(2),$$

$$\forall n \geqslant 3 : \quad \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^\beta(t)} + \frac{1}{n\ln^\beta(n)} \leqslant S_n \leqslant \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^\beta(t)} + \frac{1}{2\ln^\beta(2)} \qquad \text{(E)}$$

b. Calculons l'intégrale en effectuant le changement de variable $x = \ln(t) = \phi(t)$. On a alors $\mathrm{d}x = \phi'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$; quand $t = 2$, $x = \ln(2)$; quand $t = n$, $x = \ln(n)$. On obtient :

$$\int_2^n \frac{1}{t\ln^\beta(t)}\,\mathrm{d}t = \int_2^n \frac{1}{\ln^\beta(t)} \cdot \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\ln(2)}^{\ln(n)} \frac{1}{x^\beta}\,\mathrm{d}x.$$

1er cas : si $\beta \neq 1$, le calcul se poursuit ainsi :

$$\int_2^n \frac{1}{t\ln^\beta(t)}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{x^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right]_{\ln(2)}^{\ln(n)}$$

$$= \frac{1}{1-\beta}\left[\big(\ln(n)\big)^{1-\beta} - \big(\ln(2)\big)^{1-\beta}\right]. \qquad (*)$$

2e cas : si $\beta = 1$:

$$\int_2^n \frac{1}{t\,\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{\ln(2)}^{\ln(n)} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln|x|\Big]_{\ln(2)}^{\ln(n)}$$
$$= \ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big). \qquad (**)$$

c. On distingue 3 cas :

- **1er cas : si $\beta < 1$.**
  Alors $1-\beta > 0$. D'après $(*)$, l'intégrale tend vers $+\infty$ quand $n \to \infty$. Dans l'encadrement (E), le minorant tend vers $+\infty$.
  Par le théorème de comparaison pour les suites, on obtient $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$: la série est divergente.
- **1er cas : si $\beta = 1$.**
  On effectue le même raisonnement avec $(**)$. La conclusion est la même.
- **2e cas : si $\beta > 1$.**
  On réécrit $(*)$ pour faire apparaître $\beta - 1 > 0$:

$$\int_2^n \frac{1}{t\,\ln^\beta(t)} = \frac{1}{\beta-1}\left[\frac{1}{(\ln(2))^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln(n))^{\beta-1}}\right].$$

  Puisque $\frac{1}{\beta-1} > 0$ et que $\frac{1}{\ln^{\beta-1}(n)} \geqslant 0$:

$$\int_2^n \frac{1}{t\,\ln^\beta(t)} \leqslant \frac{1}{\beta-1}\,\frac{1}{\ln^{\beta-1}(2)}.$$

  La majoration de l'encadrement (E) devient :

$$\forall\, n \geqslant 2 : \quad S_n \leqslant \frac{1}{\beta-1}\,\frac{1}{\ln^{\beta-1}(2)} + \frac{1}{2\,\ln^\beta(2)}.$$

  Le membre de droite ne dépend pas de n donc la suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$ des sommes partielles est majorées. Comme $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ est à terme général positif, cela prouve que cette série est convergente.

6) $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ est grossièrement divergente lorsque u_n ne tend pas vers 0 quand $n \to \infty$.

Puisque $\forall\, n \geqslant 2,\ u_n = \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$, ce sera le cas *si et seulement si* :

$$(\alpha < 0) \text{ ou } (\alpha = 0 \text{ et } \beta \leqslant 0).$$

7) La série de Bertrand $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ est convergente *si et seulement si :*

$$(\alpha > 1) \quad \text{ou} \quad (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).$$

Elle est grossièrement divergente *si et seulement si :*

$$(\alpha < 0) \quad \text{ou} \quad (\alpha = 0 \text{ et } \beta \leqslant 0).$$

Problème 2

Autour de la série harmonique alternée

On étudie dans cet exercice la série harmonique alternée :

$$\sum_{n\geqslant 1} u_n := \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Tout au long de l'exercice, on notera $(S_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des sommes partielles de cette série.

1)
- Puisque la série $\sum_{n\geqslant 1} |u_n| = \frac{1}{n}$ est la série harmonique, elle est divergente.
- La série $\sum_{n\geqslant 1} |u_n|$ vérifie le critère spécial des séries alternées (CSSA) :

  H1 la suite (u_n) est alternée car : $\forall\, n \geqslant 1,\ u_n = (-1)^{n-1} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{de signe constant}}$;

  H2 H3 $|u_n| = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, en décroissant.

  Pour ces raisons, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente.

Conclusion : La série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente mais n'est pas absolument convergente : **elle est semi-convergente.**

2) a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors : $\displaystyle\int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^k}{k}\right]_0^1 = \frac{1}{k}$;
la primitive est valide car $k - 1 \neq -1$ (primitive spéciale pour $t \mapsto \frac{1}{t}$).

b. Fixons $n \geqslant 1$. Grâce au résultat de la question précédente :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t.$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$S_n = \int_0^1 \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\,t^{k-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=1}^n (-t)^{k-1}\,\mathrm{d}t.$$

Pour chaque $t \in [0,1]$ fixé, on somme dans l'intégrale une suite géométrique de raison $-t \neq 1$. Cette somme se calcule :

$$S_n = \int_0^1 (-t)^0 \, \frac{1-(-t)^{n-1+1}}{1-(-t)} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t} \, \mathrm{d}t.$$

c. Fixons $n \geqslant 1$ et majorons $\left| \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} \, \mathrm{d}t \right|$.
Tout d'abord, par l'inégalité triangulaire pour les intégrales à bornes croissantes sur un segment :

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} \right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \left| \frac{(-t)^n}{1+t} \right| \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, \mathrm{d}t.$$

Majorons d'abord la fonction intégrée. Pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$1+t \geqslant 1 > 0 \quad \text{donc} \quad \frac{t^n}{1+t} \leqslant \frac{t^n}{1} = t^n.$$

Par croissance de l'intégrale à bornes croissantes :

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Conclusion : $\forall n \geqslant 1 : \quad \left| \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} \, \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{n+1}.$

d. On reprend le résultat de **Q2b** et on utilise la linéarité de l'intégrale :

$$\forall n \geqslant 1 : \quad S_n = \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t} \, \mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} \, \mathrm{d}t.$$

Dans le résultat de la question précédente, $\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
Par le théorème d'encadrement (version par majoration de distance), cela prouve que :

$$\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} \, \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Par différence de limites finies :

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1+t} \, \mathrm{d}t = \Big[\ln \big| 1+t \big| \Big]_0^1 = \ln(2).$$

e. Puisque la suite (S_n) de ses sommes partielles admet une limite **finie,** on retrouve ici que la série harmonique alternée est convergente et on obtient la valeur de sa somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2).$$

À partir de maintenant, on note S la somme de la série harmonique alternée, et $(R_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des restes de cette série.

3) a. Pour montrer que $R_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, on montre que le rapport de ces deux quantités, en valeur absolue, est borné.
Pour cela, on utilise la troisième conclusion du CSSA, appliqué en **Q1** :

$$\forall n \geqslant 1 : \quad |R_n| = \left| \sum_{k=n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| \leqslant \left| \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit que :

$$\forall n \geqslant 1 : \quad \left| \frac{R_n}{\frac{1}{n}} \right| = n \, |R_n| \leqslant \frac{n}{n+1} \leqslant 1.$$

Puisque la suite $\big(R_n \big/ (1/n)\big)_{n\geqslant 1}$ est bornée, on a prouvé que $R_n = \underset{n\to\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{n}\right)$.

b. Par définition des restes, $S = S_n + R_n$ pour toute entier $n \geqslant 1$, donc :

$$S_n = S - R_n \quad \text{c.à.d.} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2) - R_n = \ln(2) + \underset{n\to\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{n}\right).$$

4) Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle vérifiant :

(H1) $\forall n \geqslant 1, \ a_n > 0$;
(H2) la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante ;
(H3) la suite $(a_n - a_{n+1})_{n\geqslant 1}$ est décroissante ;
(H4) $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; **(H5)** $a_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} a_n$.

On pose : $\forall n \geqslant 1, \ b_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k$.

a. Le réel b_n est le reste de rang n de la série $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n a_n$.
Cette série est convergente car elle satisfait les 3 hypothèses du CSSA : elle est alternée d'après **(H1)**, et la valeur absolue de son terme général, qui vaut a_n, tend vers 0 en décroissant d'après **(H4)** et **(H2)**.
Ses restes b_n sont donc bien définis.

b. Soit $p \geqslant 1$ fixé.

- D'après le CSSA, le signe des restes b_n de la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n a_n$ est donné par celui du premier terme de leur écriture comme somme de série. Ainsi :

$$b_{2p}=\sum_{k=2p+1}^{\infty}(-1)^k a_k \leqslant 0 \quad \text{et} \quad b_{2p+1}=\sum_{k=2p+2}^{\infty}(-1)^k a_k \geqslant 0.$$

On en déduit que :

$$\big|b_{2p+1}\big|-\big|b_{2p}\big| = b_{2p+1}+b_{2p} = \sum_{k=2p+2}^{\infty}(-1)^k a_k + \sum_{k=2p+1}^{\infty}(-1)^k a_k.$$

On effectue la translation d'indice $k=j+1$ dans la première somme :

$$\begin{aligned}
&\big|b_{2p+1}\big|-\big|b_{2p}\big| \\
&\quad = \sum_{j=2p+1}^{\infty}(-1)^{j+1}a_{j+1} + \sum_{k=2p+1}^{\infty}(-1)^k a_k \\
&\quad = -\sum_{k=2p+1}^{\infty}(-1)^k a_{k+1} + \sum_{k=2p+1}^{\infty}(-1)^k a_k \qquad \text{(indice de sommation muet)} \\
&\quad = \sum_{k=2p+1}^{\infty}(-1)^k\big(a_k-a_{k+1}\big). \qquad \text{(linéarité de la sommation)}
\end{aligned}$$

- La différence ci-dessus est de nouveau le reste d'une série $\sum_{n\geqslant 1} v_n := \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n(a_n-a_{n+1})$ qui vérifie le CSSA :
  - ∗ D'après **(H4)**, $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et par le théorème des suites extraites, $a_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, puis par différence de limites finies :
  $$a_n - a_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
  - ∗ De plus, puisque d'après **(H3)**, la suite $(a_n-a_{n+1})_{n\geqslant 1}$ décroit, tous ses termes sont au-dessus de sa limite :
  $$\forall\, n\geqslant 1 : \quad a_n - a_{n+1} \geqslant \lim_{n\to\infty}(a_n-a_{n+1}) = 0.$$
  Cela prouve que la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ est bien une série alternée (H1).
  - ∗ Désormais :
  $$\forall\, n\geqslant 1 : \quad |v_n| = \big|(-1)^n\big(a_n-a_{n+1}\big)\big| = a_n - a_{n+1},$$
  terme qui tend vers 0 (vu à l'instant), en décroissant d'après **(H3)**. Cela nous donne (H2) et (H3) pour le CSSA.

De ce fait, $\big|b_{2p+1}\big|-\big|b_{2p}\big| = \sum_{k=2p+1}^{\infty}(-1)^k(a_k-a_{k+1})$ est du signe de son premier terme, soit $(-1)^{2p+1}(a_{2p+1}-a_{2p+2}) \leqslant 0$.

Conclusion : Pour tout $p\geqslant 1$, $\big|b_{2p+1}\big| \leqslant \big|b_{2p}\big|$.

c. - On admet que $\big|b_{2p+2}\big|-\big|b_{2p+1}\big| = -\sum_{k=2p+2}^{\infty}(-1)^k\big(a_k-a_{k+1}\big)$ pour tout $p\in\mathbb{N}$.
La série apparaissant ici vérifie encore le CSSA. On en déduit que la somme est du signe du premier terme, qui est $(-1)^{2p+2}\big(a_{2p+2}-a_{2p+3}\big) \geqslant 0$. Avec le signe $-$ devant la somme, on obtient $\big|b_{2p+2}\big| \leqslant \big|b_{2p+1}\big|$.

- Récapitulons. Nous avons montré :
$$\forall\, p\in\mathbb{N} : \quad \big|b_{2p+1}\big| \leqslant \big|b_{2p}\big| \quad \text{et} \quad \big|b_{2p+2}\big| \leqslant \big|b_{2p+3}\big|.$$
Il s'agit de l'écriture aux rangs pairs et impairs de
$$\forall\, n\in\mathbb{N} : \quad |b_{n+1}| \leqslant |b_n|,$$
qui est donc désormais démontrée.

Conclusion : La suite $\big(|b_n|\big)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

d. Prenons $n\geqslant 1$ et encadrons $2|b_n|$ d'abord dans le cas où n est pair : $n=2p$. Grâce à la décroissance de la suite $\big(|b_n|\big)_{n\geqslant 0}$:

$$\big|b_{2p}\big|+\big|b_{2p+1}\big| \leqslant 2\big|b_{2p}\big| \leqslant \big|b_{2p}\big|+\big|b_{2p-1}\big|.$$

Rappelons que $b_n\geqslant 0$ quand n est impair, et $b_n\leqslant 0$ quand n est pair. On obtient :
$$-b_{2p}+b_{2p+1} \leqslant 2\big|b_{2p}\big| \leqslant -b_{2p}+b_{2p-1}.$$

Écrivons les restes b_n sous forme de sommes :

$$-b_{2p}+b_{2p+1} = -\sum_{k=2p+1}^{\infty}(-1)^k a_k + \sum_{k=2p+2}^{\infty}(-1)^k a_k = -(-1)^{2p+1}a_{2p+1} = a_{2p+1}$$

$$-b_{2p}+b_{2p-1} = -\sum_{k=2p+1}^{\infty}(-1)^k a_k + \sum_{k=2p}^{\infty}(-1)^k a_k = (-1)^{2p}a_{2p} = a_{2p}.$$

Notre encadrement devient ainsi :

$$a_{2p+1} \leqslant 2\big|b_{2p}\big| \leqslant a_{2p}.$$

Le lecteur consciencieux montrera de même que :

$$a_{2p+2} \leqslant 2 \left| b_{2p+1} \right| \leqslant a_{2p+1}.$$

En regroupant ces deux résultats, on obtient le résultat demandé :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* : \quad a_{n+1} \leqslant 2\,|\,b_n\,| \leqslant a_n.$$

e. Dans l'encadrement ci-dessus, remarquons que $a_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} a_n$ d'après **(H5)**. Le théorème d'encadrement pour les équivalents donne donc : $2\,|\,b_n\,| \underset{n\to\infty}{\sim} a_n$.
Puisque $b_n \geqslant 0$ quand n est impair et $b_n \leqslant 0$ quand n est pair :

$$\forall\, n \geqslant 1 : \quad b_n = (-1)^{n+1}\,|\,b_n\,|.$$

En multipliant l'équivalent ci-dessus par $(-1)^{n+1}/2$, on obtient :

$$b_n \underset{n\to\infty}{\sim} (-1)^{n+1}\,\frac{a_n}{2}.$$

5) a. Posons $(a_n)_{n\geqslant 1} := \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ et vérifions les 5 hypothèses du lemme :

- La suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est immédiatement strictement positive, et tend vers 0 en décroissant : **(H1)**, **(H3)** et **(H4)** sont vérifiées.
- $\forall\, n \geqslant 1 : \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n} = a_n$ donc **(H5)** est satisfaite.
- Enfin : $\forall\, n \geqslant 1,\ a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$, et cette quantité décroit en fonction de n : **(H4)** est vérifiée.

Le lemme s'applique et permet de conclure que $b_n \underset{n\to\infty}{\sim} (-1)^{n+1}\,\frac{a_n}{2}$, c.à.d. :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n+1}}{2\,n}.$$

Cette somme est l'opposé du reste R_n de la série harmonique alternée. En prenant l'opposé :

$$R_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2\,n} \quad \text{d'où} \quad R_n = \frac{(-1)^n}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)_{n\to\infty}.$$

b. Et finalement, puisque $S_n = S - R_n$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2) + \frac{(-1)^{n+1}}{2\,n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)_{n\to\infty}.$$