Devoir sur table de mathématiques n° 1

jeudi 1er octobre 2026
4 heures · 12h45-16h45

- Les téléphones portables, montres connectées et calculatrices sont interdits.
- Toute communication et tout échange de matériel entre étudiant·e·s sont interdits. Les stylos à friction, le correcteur blanc et le crayon de papier également.
- **Traitez les questions dans l'ordre.** Vous pouvez laisser un blanc si vous pensez revenir à la question plus tard.
- **Encadrez les réponses au fur et à mesure de la rédaction.**
- Sauf indication contraire, **une réponse non justifiée ne rapporte pas de point.**
- Le soin apporté à la rédaction mathématique, à la qualité de l'orthographe et de la présentation seront pris en compte dans la notation. Ils occasionneront des pénalités pouvant aller jusqu'à −10% de la note.
  Les défauts suivants seront notamment pris en compte :
  - ► **Mauvais usage des connecteurs mathématiques :** ∀, ∃ ailleurs que devant une formule, confusions entre ⇔, ⇒, « donc » etc.
  - ► **Mauvais usage des parenthèses** dans les formules de mathématiques.
  - ► **Soin général :** écriture peu lisible, hors des lignes, dans la marge, ratures.
  - ► **Orthographe :** majuscules, accents, ponctuation absents, fautes d'orthographes grossières ou trop nombreuses.
  - ► **Absence de rédaction :** formules déconnectées du raisonnement, absence de connecteurs logiques.
  - ► **Abréviations abusives.**

DS n° 1a : Connaissance du cours

Commencez par traiter les exercices suivants en 2 heures maximum. Cette partie du devoir sera ramassée à 14h45.

Exercice A

Soit a et b deux constantes réelles.
On considère les séries :

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n := \sum_{n\geqslant 0} \frac{a^n}{n!} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 0} v_n := \sum_{n\geqslant 0} \frac{b^n}{n!}.$$

1) **En utilisant la règle de d'Alembert,** (re)démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.

2) Rappeler sans démonstration la valeur des sommes de ces 2 séries.

3) Donner la définition du produit de Cauchy de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ par la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$.

4) Calculer ce produit de Cauchy.

5) Le théorème des produits de Cauchy s'applique-t-il dans ce cas ?
Si oui, que conclut-il ?

Exercice B

1) Rappeler la définition du déterminant de Vandermonde $V(-1,3,0,2)$.

2) Le calculer d'une première manière.

3) Le calculer d'une deuxième manière.

Exercice C

1) Énoncer le théorème d'interpolation de Lagrange.

2) Rappeler de quel espace vectoriel les polynômes interpolateurs de Lagrange $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ forment une base. Redémontrer cette affirmation.

On interpole désormais aux points $a = -1$, $b = 0$ et $c = 1$.

3) Donner l'expression factorisée des polynômes interpolateurs de Lagrange aux points a, b, c.

4) Déterminer l'équation $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ de l'unique parabole passant par les points $A = (-1, 2)$, $B = (0, -1)$ et $C = (1, 3)$.

Exercice D

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1) **a.** Montrer que M admet un unique polynôme annulateur unitaire, de degré 2.

b. **En utilisant ce polynôme annulateur P,** montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

c. **À l'aide d'une division euclidienne,** montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels a_n et b_n tels que

$$M^n = a_n M + b_n \mathrm{I}_3.$$

d. Déterminer ces coefficients a_n et b_n.

2) **a.** Trouver 2 vecteurs non colinéaires V_1 et V_2 appartenant à $\mathrm{Ker}(M + I_3)$; trouver 1 vecteur non nul V_3 appartenant à $\mathrm{Ker}(M - 3\mathrm{I}_3)$.
Indication. *En observant les colonnes de certaines matrices, cette question ne demande pas de résolution de système.*

b. On pose P la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont les trois colonnes sont V_1, V_2 et V_3. Montrer que P est inversible et calculer son inverse par la méthode de Gauss-Jordan.
Remarque. Si vous avez échoué à la question précédente, vous pouvez demander au professeur la réponse pour traiter cette question.

c. Calculer $P^{-1} M P$. Que remarque-t-on ?

Exercice E

On travaille dans $E = \mathbb{R}^3$ où l'on considère les vecteurs :

$$V_1 := \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad V_2 := \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, V_3 := \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}, V_4 := \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \\ 9 \end{bmatrix},$$

et la famille $\mathscr{F} := (V_1, V_2, V_3, V_4)$.

1) **Sans faire de calcul,** peut-on dire si la famille $\mathscr{F}$ est libre ? génératrice de $\mathbb{R}^3$? une base de $\mathbb{R}^3$?

2) Calculer le rang de la famille $\mathscr{F}$.
Peut-on trancher les questions non résolues à la question précédente ?

3) Extraire de la famille $\mathscr{F}$ une sous-famille libre $\mathscr{F}'$ de cardinal maximal.

4) Compléter la famille $\mathscr{F}'$ pour en faire une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice F

Soit $M \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure par blocs définie par :

$$M = \begin{bmatrix} A & C \\ 0_n & B \end{bmatrix}, \quad \text{où } A, B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

Montrer que M est inversible *si et seulement si* ses blocs diagonaux le sont.
Préciser son inverse lorsque c'est le cas.

Exercice G

Récitez les développements limités usuels à l'ordre 3.
Vous les organiserez en familles et indiquerez les liens qui les relient entre eux. Il y en avait 12 sur la feuille de révision.

La suite du devoir doit être rédigée sur une copie séparée (avec sa propre en-tête)

DS n° 1b : Problèmes

Problème 1

Séries de Bertrand

L'objectif de cet exercice est de déterminer la nature des séries de Bertrand :

$$\sum_{n\geqslant 2} u_n := \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)},$$

où α et β sont deux constantes réelles (pouvant être négatives).

1) Déterminer la nature des séries de Bertrand dans les cas suivants :

a. si $(\alpha,\beta)=(1,-1)$: la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln(n)}{n}$;

b. si $(\alpha,\beta)=(2,-2)$: la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln^2(n)}{n^2}$;

c. si $(\alpha,\beta)=\left(\frac{1}{2},\ 3\right)$: la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n}\ln^3(n)}$;

Dans les questions suivantes, nous allons traiter le cas général en discutant selon les valeurs du couple (α,β).

2) Dans le cas où $\alpha > 1$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ est convergente.

3) Dans le cas où $\alpha < 1$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ est divergente.

4) Dans le cas où $\alpha = 1$ et $\beta \leqslant 0$, déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$.

5) On suppose désormais que $\alpha = 1$ et $\beta > 0$.

a. Par comparaison série-intégrale, encadrer les sommes partielles S_n de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$.

b. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t = \int_2^n \frac{1}{t\ln^\beta(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Indication. *On pourra utiliser le changement de variable $x=\ln(t)$. Une valeur particulière de β nécessite un traitement séparé.*

c. Conclure quant à la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$.

6) Mais au fait... dans quels cas la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ est-elle grossièrement divergente ?

7) Bilan. Donner une condition nécessaire et suffisante simple pour que la série de Bertrand $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ soit convergente.

Problème 2

Autour de la série harmonique alternée

On étudie dans cet exercice la série harmonique alternée :

$$\sum_{n\geqslant 1} u_n := \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Tout au long de l'exercice, on notera $(S_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des sommes partielles de cette série.

1) Démontrer que la série harmonique alternée est semi-convergente.

2) a. Pour tout entier $k\geqslant 1$, calculer $\int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t$.

b. En déduire que : $\forall\, n\geqslant 1,\ S_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

c. Démontrer que : $\forall\, n\geqslant 1,\ \left|\displaystyle\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$.

d. En déduire que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une intégrale, que l'on calculera.

e. Que vient-on de démontrer ?

À partir de maintenant, on note S la somme de la série harmonique alternée, et $(R_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des restes de cette série. On cherche à obtenir des développements asymptotiques de la suite des sommes partielles cette série.

3) *Cette question ne nécessite pas de calculs compliqués.*

a. En utilisant la définition de la notion de $\mathcal{O}$, démontrer que $R_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ quand $n\to\infty$.

b. En déduire le développement asymptotique suivant :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2) + \underset{n\to\infty}{\mathcal{O}}\left(\tfrac{1}{n}\right). \qquad (\mathrm{DA}_1)$$

Pour affiner le résultat, on commence par démontrer un lemme. On considère une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de réels vérifiant les 5 hypothèses suivantes :

(H1) $\forall\, n\geqslant 1,\ a_n > 0$;

(H2) la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante ;

(H3) la suite $(a_n - a_{n+1})_{n\geqslant 1}$ est décroissante ;

(H4) $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; **(H5)** $a_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} a_n$.

On définit, pour tout entier $n\geqslant 1$: $b_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k$.

On cherche un équivalent de la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$.

4) a. Montrer que les réels b_n sont bien définis.

b. Pour tout entier $p\geqslant 1$, démontrer que :

$$\big|\,b_{2p+1}\,\big| - \big|\,b_{2p}\,\big| = \sum_{k=2p+1}^{\infty} (-1)^k \left(a_k - a_{k+1}\right).$$

En déduire que : $\big|\,b_{2p+1}\,\big| \leqslant \big|\,b_{2p}\,\big|$.

c. On admet que l'on a aussi, pour tout entier $p\geqslant 0$:

$$\big|\,b_{2p+2}\,\big| - \big|\,b_{2p+1}\,\big| = -\sum_{k=2p+2}^{\infty} (-1)^k \left(a_k - a_{k+1}\right).$$

La suite $\big(|\,b_n\,|\big)_{n\geqslant 1}$ est-elle monotone ?

d. Démontrer que : $\forall\, n\geqslant 1,\ a_{n+1} \leqslant 2\,|\,b_n\,| \leqslant a_n$.

Indication. *On utilisera le résultat de la question précédente, et on commencera par traiter le cas où n est pair.*

e. Montrer que : $b_n \underset{n\to\infty}{\sim} (-1)^{n+1}\,\dfrac{a_n}{2}$.

5) a. En appliquant le lemme de la question précédente à une suite adéquate, déterminer un équivalent simple du reste R_n de la série harmonique alternée.

b. En déduire un développement asymptotique plus précis que (DA_1), avec un reste en $\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.