Centrale - Option PC. Physique 1 - 2026

Partie A. Evaporation d'une goutte d'eau

I Evolution du rayon d'une goutte sphérique

Q1. La pression de vapeur saturante est la pression d'équilibre entre les phases liquide et vapeur. Elle augmente quand la température augmente.

Q2. Invariance par toute rotation autour de O ⇒ θ et φ ne jouent aucun rôle
Donc le flux diffusif et $c(\vec{r},t)$ ne dépendent que de r et t

Q3. $\boxed{\vec{j}_m = -D\,\overrightarrow{\text{grad}}\,c}$ Loi de Fick

c en $kg.m^{-3}$
D en $m^2 s^{-1}$
$\vec{j}_m$ en $kg.m^{-2}s^{-1}$

Q4. Equation d'état du gaz parfait : $PV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow c = \frac{m}{V} = \frac{MP}{RT}$

Donc : $\boxed{c(r,t) = \frac{M_{eau}P(r,t)}{RT}}$

Conditions aux limites : $c(r_g,t) = \frac{M_{eau}P_{sat}}{RT}$ $\quad c(\infty,t) = \frac{M_{eau}P_\infty}{RT}$

Q5. La goutte a un rayon qui évolue avec un temps caractéristique τ.
La diffusion de la vapeur d'eau se fait sur une longueur caractéristique L avec un temps caractéristique $\tau = \frac{L^2}{D}$

L'approximation du régime quasi-stationnaire est valable si : $\tau \ll T$

Q6. $\Phi_m = \oint_{\text{sphère de rayon } r} \vec{j}_m(r,t).d\vec{S} = j_m(r,t).4\pi r^2 = -D\frac{dc}{dr}(r,t).4\pi r^2$

Donc : $dc = -\frac{\Phi_m\,dr}{4\pi D\,r^2}$ où Φ_m = constante car flux conservatif

On intègre entre r_g et $+\infty$: $c(\infty,t) - c(r_g,t) = \frac{\Phi_m}{4\pi D}\left[\frac{1}{r}\right]_{r_g}^{+\infty} = -\frac{\Phi_m}{4\pi D r_g}$

$$\frac{M_{eau}}{RT}(P_\infty - P_{sat}) = -\frac{\Phi_m}{4\pi D r_g}$$

$$\frac{M_{eau}}{RT}P_{sat}\left(1 - \frac{P_\infty}{P_{sat}}\right) = \frac{\Phi_m}{4\pi D r_g}$$

$$\ddot{R}_H$$

Donc : $\boxed{\Phi_m = 4\pi r_g \frac{D M_{eau} P_{sat}}{RT}(1 - R_H)}$

Q7. On a : $m = \rho_{eau}.\frac{4}{3}\pi r_g^3 \Rightarrow dm = \rho_{eau}\,4\pi r_g^2\,dr_g$ ($dm < 0$ car $dr_g < 0$)

Et aussi : $dm = -\Phi_m\,dt$

Donc : $\rho_{eau}\,4\pi r_g^2\,dr_g = -4\pi r_g \frac{D M_{eau} P_{sat}}{RT}(1 - R_H)$

D'où : $\boxed{r_g\frac{dr_g}{dt} = -\frac{M_{eau} D P_{sat}}{\rho_{eau} RT}(1 - R_H)}$

Scanné avec CamScanner

Q8. En intégrant : $\frac{r_g^2(t) - r_{g0}^2}{2} = -\frac{M_{eau} D P_{sat}}{\rho_{eau} RT}(1-R_H)\,t$

Donc : $\boxed{r_g(t) = \left[r_{g0}^2 - \frac{2 M_{eau} D P_{sat}}{\rho_{eau} RT}(1-R_H)\,t \right]^{1/2}}$

Le temps d'évaporation correspond à $r_g(t_0) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{t_0 = \frac{\rho_{eau} RT\, r_{g0}^2}{2 M_{eau} D P_{sat}(1-R_H)}}$

Q9. A.N : $\underline{t_0 = 1226\ s}$

On prend comme distance caractéristique de diffusion de l'eau dans l'air $L = 10\, r_0 = 1\ cm$
On calcule $\tau = \frac{L^2}{D} \simeq 4\ s$

$\tau \ll t_0$ donc l'approximation est justifiée

(III) Température de la goutte

Q10. Le temps caractéristique de diffusion thermique dans la goutte est : $\tau = \frac{r_{g0}^2}{D_{th}}$

avec $D_{th} = \frac{\lambda_{eau}}{\rho_{eau} c}$ A.N : $\tau = 7\ s$ C'est rapide donc on peut supposer T_g uniforme

Q11. L'eau doit recevoir de la chaleur pour se vaporiser donc c'est endothermique.
La chaleur vient de l'air et va vers la goutte donc : $T_g < T_\infty$

Q12. Flux reçu par la goutte : $\Phi_{th,d} = \iint_{\text{sphère rayon } r} \vec{j_a}(r) \cdot (-dS\,\vec{u}_r)$ reçu $\Rightarrow -$

$= -j_a(r)\, 4\pi r^2 = \lambda_{air} \frac{dT}{dr} \cdot 4\pi r^2$

Donc : $dT = \frac{\Phi_{th}}{4\pi \lambda_{air}} \frac{dr}{r^2}$ avec Φ_{th} = cste en régime quasi-stationnaire

En intégrant : $T_\infty - T_g = \frac{\Phi_{th,d}}{4\pi\lambda_{air}} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_g}^{+\infty} = \frac{\Phi_{th}}{4\pi\lambda_{air} r_g}$

Donc : $\boxed{\Phi_{th,d} = (T_\infty - T_g)\, 4\pi \lambda_{air} r_g}$ $\boxed{R_{th,d} = \frac{1}{4\pi\lambda_{air} r_g}}$

Q13. Pendant dt, la goutte reçoit la chaleur $\Phi_{th,d}\, dt$.
Celle-ci provoque la vaporisation d'une masse $dm = \Phi_m dt \Rightarrow$ énergie $dm.\Delta h_{vap}$

Donc : $(T_\infty - T_g)\, 4\pi \lambda_{air} r_g = 4\pi r_g \frac{M_{eau} D}{R} \left(\frac{P_{sat}(T_g)}{T_g} - \frac{P_\infty(T_\infty)}{T_\infty} \right) \Delta h_{vap}$

$$T_\infty - T_g = \frac{M_{eau} D\, \Delta h_{vap}}{\lambda_{air} R} \left(\frac{P_{sat}(T_g)}{T_g} - \frac{P_\infty(T_\infty)}{T_\infty} \right)$$

$$= \frac{M_{eau} D\, \Delta h_{vap}}{\lambda_{air} R} \frac{P_{sat}(T_\infty)}{T_\infty} \left(\frac{P_{sat}(T_g) \cdot T_\infty}{T_g\, P_{sat}(T_\infty)} - \underbrace{\frac{P_\infty(T_\infty)}{P_{sat}(T_\infty)}}_{=R_H} \right)$$

D'où : $\boxed{T_\infty - T_g = \frac{M_{eau} D\, \Delta h_{vap}\, P_{sat}(T_\infty)}{\lambda_{air} R T_\infty} \left(\frac{P_{sat}(T_g)\, T_\infty}{T_g\, P_{sat}(T_\infty)} - R_H \right)}$

Scanné avec CamScanner