TD n° 5 / Réduction des endomorphismes

Proche du cours

► 1 Diagonalisation concrète élémentaire

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer le polynôme caractéristique de A.

2) En déduire, sans calcul supplémentaire, que A est diagonalisable.

3) Déterminer les sous-espaces propres de A.

4) Diagonaliser A, c'est-à-dire expliciter une matrice P inversible et une matrice D diagonales telles que $A = P\,D\,P^{-1}$.

5) Calculer les coefficients de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On vérifiera que la réponse est correcte pour $n = 0$ et $n = 1$.

► 2 Réduction en élégance

Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$.

1) Calculer le rang de B. En déduire une valeur propre de B ainsi que la dimension du sous-espace propre associé.

2) En déduire que le polynôme caractéristique de B est scindé sur $\mathbb{R}$, puis l'expression de χ_B.

3) Vérifier le résultat en calculant χ_B grâce à sa définition.

4) La matrice B est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?

► 3 Diagonalisation d'un endomorphisme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f l'application définie sur $\mathbb{K}_n[X]$ par :

$$\forall\, P \in \mathbb{K}_n[X], \quad f(P) = X^n\, P\left(\tfrac{1}{X}\right).$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

2) Calculer $f \circ f$. En déduire que f est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

► 4 Trigonalisation et application aux suites récurrentes

Soit $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer le polynôme caractéristique de C.
Est-elle diagonalisable ? Trigonalisable ?

2) Déterminer les éléments propres de C, ainsi qu'une base de l'espace $\mathrm{Im}(C + \mathrm{I}_3)$.

3) Montrer que la matrice C est semblable à la matrice T.
Indication : *Tous les résultats de la question précédente sont utiles.*

4) **a.** Montrer que T peut s'écrire $D + N$, où D est diagonale, N est nilpotente et D et N commutent.
b. En déduire T^n, puis C^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) On considère trois suites $(x_n)_{n\geqslant 0}, (y_n)_{n\geqslant 0}, (z_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = & 2\,x_n - 3\,y_n - & z_n \\ y_{n+1} = & x_n - 2\,y_n - & z_n \\ z_{n+1} = & -2\,x_n + 6\,y_n + 3\,z_n. \end{cases}$$

Expliciter x_n, y_n, z_n en fonction de n et de x_0, y_0, z_0.

► 5 Théorème de Cayley-Hamilton

1) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. À l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, montrer que A^{-1} est un polynôme en A, c'est-à-dire :

$$\exists\, Q \in \mathbb{K}[X] \,/ \quad A^{-1} = Q(A).$$

2) En utilisant la correspondance vectoriel/matriciel, écrire et démontrer le résultat analogue pour les endomorphismes.

► 6 Recherche de sous-espaces stables

Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Diagonaliser la matrice A.

2) On suppose que F est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ stable par u. Montrer que F est engendré par une famille de vecteurs propres de u.

3) Déterminer tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par u.

Entraînement

► 7 Problème de réduction à paramètres

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

► 8 Racines carrées d'une matrice 3×3

Soit $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 3 & 3 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.
On recherche les (éventuelles) **racines carrées de A,** c'est-à-dire les matrices $R \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $R^2 = A$.

1) Montrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice D semblable à A.

2) Soit $S \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ une racine carrée de D.
a. Montrer que S et D commutent.
b. Montrer que S est diagonale.

3) Déterminer les racines carrées S de D.

4) En déduire toutes les racines carrées R de la matrice A.

5) **a.** Quelles caractéristiques des éléments propres de la matrice A expliquent qu'elle ait exactement 4 racines carrées ?
b. Énoncer des conjectures quant au nombre de racines carrées d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ plus générale, en discutant selon la nature de ses éléments propres.

► 9 Réduction de matrices réelles dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $Z \in \mathbb{C}^n$ quelconque.

1) **a.** Montrer que Z est vecteur propre de A pour la valeur propre μ *si et seulement si* $\overline{Z}$ est vecteur propre de A pour la valeur propre $\overline{\mu}$.
b. On suppose que $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Montrer que $\overline{\mu} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et que les espaces propres $E_\mu(A)$ et $E_{\overline{\mu}}(A)$ ont même dimension.
c. On considère un vecteur $Z \in E_\mu(A)$, et pose $X = \mathrm{Re}(Z)$ et $Y = \mathrm{Im}(Z)$. Montrer que les vecteurs AX et AY sont combinaisons linéaires de X et de Y.

Application. On cherche à réduire la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ -10 & 6 & 18 \\ 5 & -2 & -9 \end{bmatrix}$.

2) **a.** Montrer que -2 et $1+\mathrm{i}$ sont valeurs propres de A.
En déduire que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

b. Déterminer une base (V, Z, Z') de $\mathbb{C}^3$, constituée de vecteurs propres de A, où $V \in \mathbb{R}^n$ et $Z' = \overline{Z}$.

c. On définit $X, Y \in \mathbb{R}^3$ par $X = \mathrm{Re}(Z)$ et $Y = \mathrm{Im}(Z)$.
Montrer que la famille (V, X, Y) est une base de $\mathbb{R}^3$.

d. En déduire que la matrice A est semblable dans $\mathbb{R}$ à une matrice diagonale par blocs que l'on précisera.

►10 Endomorphismes nilpotents d'indice maximal

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, E étant un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie $n \geqslant 2$. On suppose que u est nilpotent d'indice n, c'est-à-dire que :

$$u^n = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \text{mais} \quad u^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

1) Déterminer le polynôme caractéristique de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? trigonalisable ?

2) Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que la famille

$$\big(x,\, u(x),\, u^2(x),\, \ldots,\, u^{n-1}(x)\big)$$

soit une base de E.

3) Trigonaliser l'endomorphisme u.

4) On note T la matrice triangulaire supérieure obtenue à la question précédente.
Calculer $P(T)$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$.

►11 Éléments propres en dimension infinie

Justifier que les applications suivantes sont des endomorphismes et déterminer leurs éléments propres :

1) $T\colon \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

2) $\Pi\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto Q$, unique primitive de P qui s'annule en 0.

►12 Matrices circulantes

Soit $n \geqslant 2$ fixé et $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On pose :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \text{ et } M = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{bmatrix}.$$

1) Calculer χ_J. Justifier que J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et la diagonaliser. Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

2) Calculer J^n par trois approches différentes : en utilisant la forme diagonalisée de J ; en utilisant son polynôme caractéristique ; par une approche géométrique (observer l'effet de $u\colon X \mapsto JX$ sur ma base canonique).

3) Exprimer M comme un polynôme en J.

4) En déduire que M est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres. Quels sont leurs ordres de multiplicité ?

5) Calculer le déterminant de M.

6) Exprimer la trace de M de deux manières.
Retrouver ce résultat par un calcul direct.

►13 Comportement d'une suite récurrente linéaire

On étudie une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant la relation de récurrence d'ordre 3 suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = -\tfrac{7}{6}\, u_{n+2} + \tfrac{3}{2}\, u_{n+1} - \tfrac{1}{3}\, u_n.$$

On introduit la matrice compagnon C dont on donne une diagonalisation :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/3 & 3/2 & -7/6 \end{pmatrix} = P\,D\,P^{-1} \quad \text{où } D = \mathrm{diag}(-2,\, 1/2,\, 1/3)$$
$$\text{et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1/2 & 1/3 \\ 4 & 1/4 & 1/9 \end{pmatrix}.$$

Pour alléger les notations, on pose $\alpha = -2$, $\beta = 1/2$ et $\gamma = 1/3$.

1) En utilisant ces informations, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est combinaison linéaire des suites $(\alpha^n)_{n\geqslant 0}$, $(\beta^n)_{n\geqslant 0}$ et $(\gamma^n)_{n\geqslant 0}$.

2) On note V_1, V_2, V_3 les colonnes de la matrice P.

a. Justifier sans calcul que le vecteur $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ peut s'écrire $x\,V_1 + y\,V_2 + z\,V_3$ pour des réels x, y, z.

b. À quelle condition sur (x, y, z) la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est-elle convergente ?

Approfondissement

►14 Polynôme minimal dans le cas diagonalisable

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable sur $\mathbb{K}$.
Montrer que les polynômes annulateurs de A sont exactement les multiples du polynôme $P_0 = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)$.

►15 Diagonalisabilité des puissances

Soit n et p deux entiers naturels non nuls et $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^p est diagonalisable. **Indication :** *On pourra utiliser la caractérisation par les polynômes annulateurs.*

►16 Endomorphismes vérifiant une équation algébrique

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant : $u^2 + u + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = \mathbf{0}$.

1) Soit F un sous-espace stable par u et $x \notin F$. On introduit le sous-espace $\Pi = \mathrm{Vect}\big(x, u(x)\big)$.

a. Montrer que :

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \big[\, \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 0 \implies \alpha = \beta = 0 \,\big].$$

b. Démontrer que Π est de dimension 2 et qu'il est stable par u.

c. Montrer que $u(x) \notin F$, puis que Π et F sont en somme directe.

2) **a.** Justifier qu'on peut construire des plans $\Pi_1, \ldots, \Pi_\ell$, tous stables par u, et supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.
Qu'en déduit-on concernant la dimension de $\mathbb{R}^n$?

b. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, de blocs $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

►17 Tour de magie

Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = \mathrm{I}_2$. Montrer que $A^{12} = \mathrm{I}_2$.

►18 Matrices stochastiques

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice **stochastique,** c'est-à-dire vérifiant : $\forall\, i, j \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j} \geqslant 0$ et $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

1) Montrer que 1 est valeur propre de A.

2) Montrer que toutes les valeurs propres complexes de A sont de module inférieur ou égal à 1.

3) ♠ On suppose que A est **strictement stochastique,** c'est-à-dire que A est stochastique et que ses coefficients sont strictement positifs. Montrer que 1 est la seule valeur propre de A de module 1.