Algèbre - Chapitre 4 : Nombres complexes - Partie 1

2026-2027

Exercice 1 :

Déterminez les parties réelles et imaginaires des complexes suivants :

$$x = (1+i)^3 \quad y = \frac{1-4i}{1+5i} \quad z = \frac{1-4i}{1+5i} + \frac{1+4i}{1-5i} \quad v = \frac{(1+i)^2}{(1-i)^2} \quad w = \frac{(1+i)^2}{1-i}$$

$x = -2 + 2i$
$y = \frac{19}{26} - \frac{9}{26}i$
$z = y + \bar{y} = 2Re(y) = \frac{19}{13}$
$v = \frac{2i}{-2i} = -1$
$w = (1-i)v = -1 + i$

Exercice 2 :

Résoudre les équations suivantes, d'inconnues z (et z') dans $\mathbb{C}$:

1. $z + 3iz = 4 + i - z$
2. $\frac{(1+i\sqrt{2})z + 1}{i + 3 - z} = 3$
3. $z^2 + z + 1 = 0$
4. $z^2 + z - 1 = 0$
5. $4z^2 - 10z + 4 = 0$
6. $\bar{z}^2 - \bar{z} + 1 = 0$
7. $(1-i)z - 3i\bar{z} = 1 + 4i$
8. $\begin{cases} z + z' &= 1 + 4i \\ z - z' &= 1 - 2i \end{cases}$

1.
$$z + 3i = 4 + i - z \Leftrightarrow 2z = 4 - 2i$$
$$\Leftrightarrow z = 2 - i$$

2. On résout pour $z \neq i + 3$.
$$\frac{(1+i\sqrt{2})z + 1}{i + 3 - z} = 3 \Leftrightarrow (1+i\sqrt{2})z + 1 = 3i + 9 - 3z$$
$$\Leftrightarrow (4+i\sqrt{2})z = 8 + 3i$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{8+3i}{4+i\sqrt{2}}$$

3. C'est une équation algébrique du second degré, avec discriminant $\Delta = -3$.
On a donc deux solutions complexes conjuguées :
$$z = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \text{ et } z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

4. Cette fois $\Delta = 5$, donc deux solutions réelles (donc également complexes !) :
$$z = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } z = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Exercice 3 :

Soient $U = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ et $z \in U \setminus \{1\}$. Montrer que $\frac{z+1}{z-1}$ est un imaginaire pure.

Exercice 4 :

Calculer les racines carrées complexes des nombres suivants :
$A = -50$ $B = 2i$ $C = 8 - 6i$ $D = 24 - 10i$.

1. A est un réel négatif, on peut donner directement les racines carrés complexes de A, qui sont $i\sqrt{50}$ et $-i\sqrt{50}$, ou encore $i5\sqrt{2}$ et $-i5\sqrt{2}$.
2. On cherche z telle que $z^2 = 2i$, avec $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.
   Comme $(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ on en déduit $x^2 - y^2 = 0$ et $2xy = 2$.
   De plus, $|z|^2 = |z^2| = |2i| = 2$ donc $x^2 + y^2 = 2$.
   On déduit de ces trois équations que $x^2 = 1$, $y^2 = 1$ et $xy \geq 0$, d'où deux racines complexes possibles :

$$z = 1 + i \text{ et } z = -1 - i$$

3. La même technique donne $x^2 - y^2 = 8, xy < 0$ et $x^2 + y^2 = \sqrt{64+36} = 10$
   d'où les deux racines :
   $z = 3 - i$ ou $z = -3 + i$
4. Cette fois $x^2 - y^2 = 24$, $xy < 0$ et $x^2 + y^2 = \sqrt{576} = 26$
   d'où $z = 5 - i$ ou $z = -5 + i$

Exercice 5 :

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(1) \qquad iz^2 + (i+3)z + 2 - 2i = 0.$$

$$(2) \qquad z^2 - (5 - 14i)z - 2(5i + 12) = 0.$$

$$(3) \qquad z^3 - (5+3i)z^2 + (7+16i)z + 3 - 21i = 0$$

(on cherchera pour cette dernière une solution imaginaire pure)

1. c'est un polynôme du second degré à coefficient complexe. Le discriminant est $\Delta = -2i$.
   On cherche δ tel que $\delta^2 = -2i$. Avec la méthode de l'exercice 4 on trouve $\delta = 1-i$ ou $\delta = -1+i$.
   D'où les deux solutions de l'équation (1) :

$$z = \frac{-i - 3 + 1 - i}{2i} = \frac{-1 - i}{i} = -1 + i \text{ ou } z = \frac{-i - 3 - 1 + i}{2i} = 2i$$

2. A nouveau, on calcule le discriminant et on trouve $\Delta = -75 - 100i$
   Pour la recherche de $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$, on a

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= -75 \\ 2xy &< 0 \\ x^2 + y^2 &= 125 \end{cases}$$

   $L_1 + L_3$ donne $2x^2 = 50$, donc $x = 5$ ou $x = -5$
   $L_3 - L_1$ donne $2y^2 = 200$ d'où $y = 10$ ou $y = -10$.
   de $xy < 0$ on déduit enfin que

$$\delta = -5 + 10i \text{ ou } \delta = 5 - 10i$$

   D'où les solutions de l'équation (2)

$$z = -2i \text{ ou } z = 5 - 12i$$

3. Cherchons une solution sous la forme $z = bi$ avec $b \in \mathbb{R}$.
   Un tel z est solution si

$$-b^3 i + (5+3i)b^2 + (7+16i)bi + 3 - 21i = 0,$$

$$\text{c'est-à-dire si } 5b^2 - 16b + 3 + i(-b^3 + 3b^2 + 7 - 21) = 0$$

   Il faut donc $5b^2 - 16b + 3 = 0$ et $-b^3 + 3b^2 + 7 - 21 = 0$. La première équation donne $b = 3$ ou $b = \frac{1}{5}$, et seul $b = 3$ convient pour la deuxième.
   On peut donc factoriser l'expression par $z - 3i$.
   On cherche donc β tel que

$$z^3 - (5+3i)z^2 + (7+16i)z + 3 - 21i = (z - 3i)(z^2 + \beta z + i + 7)$$

En développant et en identifiant, on trouve $\beta = -5$
On cherche donc maintenant les racines de $z^2 - 5z + i + 7$
Le discriminant vaut $\Delta = -3 - 4i$, dont les racines sont $\delta = 1 - 2i$ ou $\delta = -1 + 2i$.
On a donc comme racine $z = 3 - i$ ou $z = 2 + i$
Finalement

$$(3) \Leftrightarrow z = 3i \text{ ou } z = 3 - i \text{ ou } z = 2 + i$$

Exercice 6 :

Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$ l'application définie par $f(z) = \dfrac{3z - i}{i + z}$.

1. (a) Montrez que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, $f(z) \neq 3$.
   (b) Soit $y \in \mathbb{C} \setminus \{3\}$. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ et de paramètre y :

$$f(z) = y$$

   (c) En déduire que f est bijective de $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{3\}$ et déterminez $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{C} \setminus \{3\}$.
2. (a) Déterminez l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $f(z) \in \mathbb{R}$. On pourra écrire que $z = x + iy$ avec x et y réel.
   (b) Même question avec l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z)$ est un imaginaire pur.