Algèbre - Chapitre 5 : Calcul matriciel

2026-2027

Exercice 1 :

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculez lorsque c'est possible les expressions suivantes :

$$A^2, AB, BA, AE, EA, ED, DE, BD, CD, A(BC)D, (-A+2E)B$$

Exercice 2 :

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer tous les produits de deux matrices différentes possibles.

Exercice 3 :

Trouvez toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 :

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. En écrivant A en fonction de I_3 et B, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. En choisissant une matrice du même type que B, calculez C^n avec $C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Exercice 6 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculez la puissance n-ème de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ et en déduire la puissance n-ème de la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrez qu'il existe une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que pour tout entier $n \geq 1$:

$$A^n = \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}$$

   On précisera la relation liant pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+2}, u_{n+1} et u_n.
2. A partir du calcul de A^{2n}, déterminez une relation entre u_{2n}, u_{n-1}, u_n et u_{n+1}.

Exercice 8 :

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculez PS et SP. En déduire que P est inversible, d'inverse $P^{-1} = S$.
2. Calculez $D = P^{-1}AP$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculez D^n.
4. Montrez que pour tout n, on a la formule
$$A^n = PD^nP^{-1}$$
5. En déduire A^n.

Exercice 9 :

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

1. Calculez $M^2 + M - 2I_3$.
2. En déduire que M est inversible et préciser son inverse.

Exercice 10 :

Soit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(A + I_3)^3$.
2. En déduire A^{-1}.

Exercice 11 :

Soit A et B deux matrices symétriques. AB est-elle nécessairement symétrique ? Donnez une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle le soit.

Exercice 12 : trace d'une matrice

Pour toute matrice carrée M, on appelle trace de M et on note $\text{tr}(M)$ la somme des coefficients diagonaux de M.

Dans tout l'exercice, n et p désigne des entiers naturel non nuls.

1. Pour $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, exprimer $\text{tr}(M)$ à l'aide d'un signe somme.
2. Soit $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que :
$$\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{K}, \text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}(A).$$
3. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
   a) Justifiez que AB et BA sont des matrices carrées.
   b) Montrer que : $\text{tr}(A \times B) = \text{tr}(B \times A)$.
   c) En déduire que si $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice inversible, alors pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
$$\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$$
4. A-t-on $\text{tr}(A \times B) = \text{tr}(A) \times \text{tr}(B)$ pour tout couple de matrices carrées (A, B) ?
5. Peut-on trouver des matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$? Si oui, les préciser.
6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
   Existe-t-il une matrice P inversible telle que $B = P^{-1}AP$?
7. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telles que
$$A \times B = I_n \text{ et } B \times A = I_p.$$
   Montrer que les matrices A et B sont carrées (c'est à dire $n = p$).