Algèbre - Chapitre 4 : Nombres complexes - Partie 1
Exos supplémentaires

2026-2027

Exercice 1 :

On considère l'équation suivante, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = 0$$

1. Montrez qu'il existe un unique $a \in \mathbb{R}$ tel que ai est solution de cette équation.
   En déduire que cette équation admet une unique solution imaginaire pure, et la déterminer. On notera α cette solution.
2. Déterminer deux réels b et c tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$:
$$z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = (z-\alpha)(z^2+bz+c)$$
3. Résoudre l'équation :
$$z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = 0$$

Exercice 2 :

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ et soit $u = \dfrac{z+3}{z-i}$.
Déterminez l'ensemble des complexes vérifiant $u \in \mathbb{R}$ et les représenter sur le plan complexe.

Exercice 3 :

Soit a et b deux nombres complexes, avec $a \neq b$ et $|a| = |b| = 1$. Montrez que pour tout $z \in \mathbb{C}$, le nombre $Z = \dfrac{z + ab\bar{z} - (a+b)}{a-b}$ est un imaginaire pure.

Exercice 4 :

Considérons l'équation (E), d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivante :

$$z^3 - 6z + 4 = 0 \qquad (E)$$

Soit z une solution de (E), et soient u et v complexes tels que

$$\boxed{z = u + v \text{ avec } uv = 2}$$

(on admet que ces u et v existent)
L'objectif est de déterminer tous les u et v possibles pour en déduire z..

1. (a) Que vaut u^3v^3 ?
   (b) Développez $(u+v)^3$ et montrez que $u^3 + v^3 = -4$.
2. (a) Justifiez que u^3 et v^3 sont les racines du polynôme $X^2 + 4X + 8$.
   (b) En déduire les deux valeurs possibles pour u^3 et v^3.
3. Soit $w = -2 + 2i$.
   Comme u et v jouent des rôles symétriques, on suppose que $u^3 = -2 + 2i$.
   (a) Ecrire w sous la forme exponentielle et résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue u : $u^3 = w$. On laissera les solutions sous forme exponentielle.
   (b) En déduire pour chacune des trois solutions précédentes la valeur de v.
4. Conclure en donnant les trois valeurs de z solutions de (E).