Analyse- Chapitre 2 : Fonctions usuelles Bonus

2026-2027

Exercice 1 :

1. a) Montrez que l'équation $2\,\mathrm{sh}(x)+1=0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note a cette solution (bien qu'elle soit calculable, il n'est pas nécessaire d'avoir l'expression exacte pour continuer cet exercice)
   b) Justifiez que la fonction $u : x \mapsto \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}\, x$ est dérivable et montrez que pour tout réel x, $\mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}\, x \geq 0$
2. Soit $f : x \mapsto e^{\mathrm{sh}(x)} - x - 1$.
   a) Justifiez que f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et calculez $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
   b) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$
3. Montrez que $1 + x \leq e^{\mathrm{sh}(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$1 - x \leq \frac{1}{e^{\mathrm{sh}(x)}},$$
puis que pour tout $x \in]0,1[$,
$$1 + x \leq e^{\mathrm{sh}(x)} \leq \frac{1}{1-x}$$
5. Conclure que $\forall x \in]0,1[$,
$$\ln(1+x) \leq \mathrm{sh}(x) \leq -\ln(1-x)$$
6. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $n \geq 2$.
On considère la somme
$$S_n = \sum_{k=n}^{np} \mathrm{sh}\left(\frac{1}{k}\right)$$
   a) Justifiez que $\forall k \in \mathbb{N}$ et $k \geq 2$,
$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \mathrm{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leq -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$$
   b) En déduire que $\forall n \geq 2$,
$$\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leq S_n \leq -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right)$$
   c) Déterminer la limite de S_n quand $n \to +\infty$