Algèbre - Chapitre 3 : sommes et produits
exo bonus

2026-2027

Exercice 1 :

Montrez que pour tout $x \geq 0$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Exercice 2 :

Soit A_n le produit des entiers pairs compris entre 1 et $2n$, et B_n celui des entiers impairs compris entre 1 et $2n+1$.

1. Exprimez A_n à l'aide $n!$.
2. Montrez que $B_n = \dfrac{(2n+1)!}{2^n n!}$

Exercice 3 :

Justifiez que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$ et en déduire les valeuurs de

$$\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k \text{ pair}}}\binom{n}{k} \text{ et } \sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k \text{ impair}}}\binom{n}{k}$$

Exercice 4 :

Montrez que pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^2$, on a

$$\forall p\in\mathbb{N}, \binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^{p}\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}$$

Exercice 5 :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$. Exprimez $-S$ en fonction de S et en déduire la valeur de S.

Exercice 6 :

1. Soit le polynôme $P = X^2 - 2X + 1$. Déterminez α, β et γ réel tel que $P = \alpha + \beta X + \gamma X(X+1)$
2. En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la valeur de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 k!$

Exercice 7 :

Calculez $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}\min(i,j)$.

Exercice 8 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de termes dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n}u_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n}u_k\right)^2$$

Montrez que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = n$.