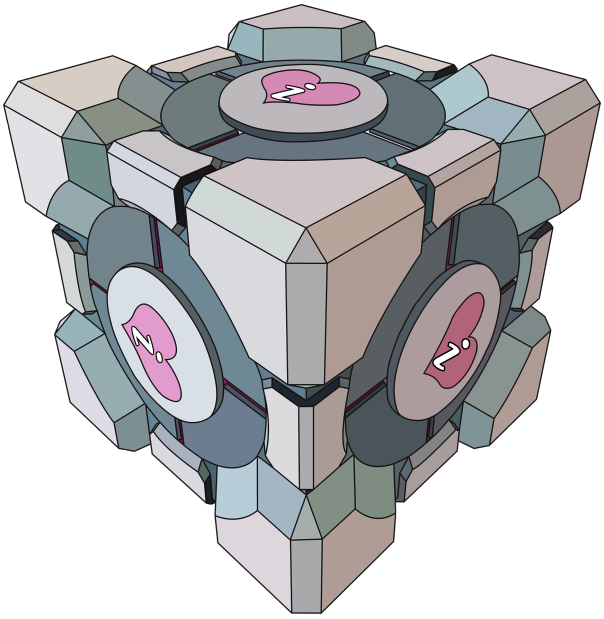
Chapitre 4

Nombres complexes : première partie

Autour de la forme algébrique.



Contenu :

I. L'ensemble $\mathbb{C}$ **3**
1) Structure : . . . 3
2) Calcul dans l'ensemble des complexes : . . . 4
a) Opérations usuelles . . . 4
b) Sommes et techniques . . . 5
3) Représentation graphique : le plan complexe . . . 6

II. Conjugaison et module : **7**
1) Conjugaison : . . . 7
2) Module . . . 8
3) Propriétés et formules autour du module : . . . 9

III. Equations algébriques **10**
1) Racine d'une fonction polynomiale . . . 10
2) Racines carrées d'un nombre complexe . . . 11
3) Equations du second degré dans $\mathbb{C}$ . . . 12
a) Forme canonique : . . . 12
b) Racines d'un polynôme du second degré complexe : . . . 12
c) Racines complexes d'un polynôme réel : . . . 14

I. L'ensemble $\mathbb{C}$

1) Structure :

Définition : nombres complexes

On admet l'existence d'un nombre i (non réel) tel que $i^2 = -1$.
On appelle ensemble des **nombres complexes** , noté $\mathbb{C}$, l'ensemble des éléments s'écrivant sous la forme $a + ib$ avec a et b deux réels.
Ainsi,

$$\mathbb{C} = \{a + ib; a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}\}$$

Exemples :

- Les nombres $1 + i$, $2 - 3i$, $4i + 1$ sont des nombres complexes....
- Les nombres réels sont des nombres complexes :

Theorème 1 : unicité des parties réelles et imaginaires

Soit z un complexe. L'écriture $z = a + ib$ avec a et b **réels** est appelée "forme algébrique" et est unique, c'est-à-dire que si $a + ib = a' + ib'$, alors $a = a'$ et $b = b'$.

On dit alors que a est la **partie réelle** de z, notée $\text{Re}(z)$, et b est appellée la **partie imaginaire** notée $\text{Im}(z)$.

Deux nombres complexes z et z' sont donc égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

▷ *Preuve* : On admet. ◁

Exemples :

- $1 + 3i$ a pour partie réelle et pour partie imaginaire
- Soit $z = 2 - i$. Alors $\text{Re}(z) =$ et $\text{Im}(z) =$.
- Pour $z = 4$, on a $\text{Re}(z) =$ et $\text{Im}(z) =$
- $\text{Re}(3i) =$ et $\text{Im}(3i) =$

Définition : imaginaires purs

Les nombres $z \in \mathbb{R}$ pour lesquels $\text{Re}(z) = 0$ sont appelés **imaginaires purs**.

On note $\mathbf{i}\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.

2) Calcul dans l'ensemble des complexes :

a) Opérations usuelles

Le calcul dans les nombres complexes suit les mêmes règles que le calcul dans $\mathbb{R}$.

Définition :

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux complexes (avec a, a', b et b' réels). On définit les opérations suivantes :

- **Addition :** $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- **Multiplication :** $zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$

Et on définit de même les **fractions** : $\frac{z}{z'}$ est le complexe qui, multiplié par z' donne z.

Exemples :

- $(1 + 2i) + (4 - 5i) =$
- $(1 + 2i)(4 - 5i) =$

Méthode : Ecrire une fraction complexe sous forme algébrique

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.
Pour écrire le quotient $\frac{z}{z'}$ sous forme algébrique, il suffit de multiplier le numerateur et le dénominateur par $a' - ib'$.
Alors $\frac{z}{z'} = \frac{(a + ib)(a' - ib')}{a^2 + b^2}$ et il reste à développer le numerateur.

Exemples :

- $\frac{1}{2 + 3i} =$
- $\frac{1 - 2i}{1 + 3i} =$

En définissant ainsi, donc en calculant comme chez les nombres réels, on obtient une structure identique à celle de $\mathbb{R}$. On appelle ce genre d'ensemble un **corps** :

Proposition 1 :

$\mathbb{C}$ est un corps, c'est-à-dire :

- ◯ $\mathbb{C}$ est stable pour $+$ et pour $\times$ (si on multiplie ou si on additionne deux complexes, on obtient un nombre complexe)
- ◯ $\mathbb{C}$ contient un neutre pour $+$: 0. (ajouter 0 ne fait rien)
- ◯ $\mathbb{C}$ contient un neutre pour $\times$: 1 (multiplier par 1 ne fait rien)
- ◯ Tout complexe z admet un opposé : il existe z' tel que $z + z' = 0$. On le note $-z$.
- ◯ Tout complexe $z \neq 0$ admet un inverse : il existe z' tel que $zz' = 1$. On le note $\frac{1}{z}$.
- ◯ $+$ et $\times$ sont commutatifs et associatifs
- ◯ $\times$ est distributif sur $+$.

▷ *Preuve* : On admet, mais cela se vérifie facilement avec la définition de $\mathbb{C}$ et le calcul dans $\mathbb{R}$... ◁

Comme chez les réels et avec la même preuve, $\mathbb{C}$ est **intègre**, c'est à dire :

Theorème 2 :

Soit z et z' deux complexes. Alors :

$$zz' = 0 \iff z = 0 \text{ ou } z' = 0$$

b) Sommes et techniques

Les formules déjà obtenues pour les réels sont les mêmes chez les complexes, ainsi :

Proposition 2 :

- Formule du binôme de Newton : pour tout $x, y \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

- Identité géométrique : pour tout $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k$$

- Somme géométrique : pour tout $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

De même, les systèmes à coefficients complexes se comportent de la même façon que les systèmes à coefficients réels. On pourra donc tout à fait utiliser le pivot de Gauss par exemple....

Danger ! **Absence de relation d'ordre**

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est totalement ordonné, c'est à dire que si on a deux réels x et y, alors $x \leq y$ ou $y \leq x$.
De plus, si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$.

On ne peut pas définir de telle relation d'ordre chez les complexes, en tout cas pas qui soit compatible avec les inégalités comme dans $\mathbb{R}$.

Essayons par exemple de comparer 0 et i.

Conséquence :
On ne compare jamais deux complexes (à part pour dire "égaux" ou "différents") : il n'y a pas de complexe plus grand qu'un autre. En conséquence, on ne considèrera pas d'inéquations complexes, qui n'auraient de toute façon aucun sens, ni d'intervalles de complexes.

3) Représentation graphique : le plan complexe

Soit $\mathcal{P}$ le plan et soit $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal du plan $\mathcal{P}$.
A chaque point M du plan de coordonnées (a, b) dans le repère $\mathcal{R}$, on associe le nombre complexe $z = a+ib$.
Cette représentation est bijective : chaque complexe a un et un seul point qui lui est associée et réciproquement, chaque point a un et un seul complexe associé.

VOCABULAIRE

Si M a pour coordonnées (a, b) dans $\mathbb{R}^2$, $z = a + ib$ est appelé **affixe de** M.
Si un vecteur $\vec{u}$ a pour cordonnées (a, b) dans $\mathbb{R}^2$, on appelle également affixe de $\vec{u}$ le complexe $z = a + ib$.

Propriété 1 :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs d'affixes respectives z et z', alors l'affixe de $\vec{u} + \vec{v}$ est $z + z'$.
De manière plus générale, si λ et μ sont deux réels, l'affixe de $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ est $\lambda z + \mu z'$.

On dit alors que la représentation dans le plan complexe est linéaire, et on parle d'**isomorphisme** ("conserve la forme") entre le plan géométrique et l'ensemble $\mathbb{C}$. On confond ainsi les deux en parlant de **plan complexe**.

II. Conjugaison et module :

1) Conjugaison :

Définition : conjugué d'un complexe

Soient a et b deux réels et soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle **conjugué** de z le nombre $\bar{z} = a - ib$.

Interprétation graphique :

Propriété 2 : Conjugaison et opérations

Soit z et z' deux complexes, alors :

(i) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$

(ii) $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$ et si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

(iii) $\bar{\bar{z}} = z$

▷ *Preuve :*

◁

Avec exactement le même genre de preuve, on tire les formules ci dessous :

Propriété 3 : lien conjugaison, partie réelle et partie imaginaire

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ (et donc $z + \bar{z} \in \mathbb{R}$)
- $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$ (et donc $z - \bar{z} \in i\mathbb{R}$)

Enfin, la conjugaison permet des caractérisations intéressantes :

Proposition 3 : conjugaison et réel/imaginaire pure

- $z \in \mathbb{R} \iff$
- $z \in i\mathbb{R} \iff$

▷ *Preuve :*

◁

2) Module

Définition : module d'un complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle **module** de z, noté $|z|$ le nombre réel suivant :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Au secours ! MÊME NOTATION QUE LA VALEUR ABSOLUE !

Supposons $z \in \mathbb{R}$, alors $z = z + i \times 0$.
La formule du module donne alors $|z| = \sqrt{z^2 + 0^2} = \sqrt{z^2}$
Or on a vu que pour tout réel x, $|x| = \sqrt{x^2}$: on peut donc bien utiliser la même notation.
Le module est donc un prolongement à $\mathbb{C}$ de la valeur absolue !

Interpréation géométrique :

3) Propriétés et formules autour du module :

Proposition 4 : propriétés autour du module

Soit z et z' deux nombres complexes. Alors :

1. $|z| \geq 0$ et $|z| = 0 \iff z = 0$.
2. $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.
3. $|z| = |\bar{z}|$
4. $|zz'| = |z||z'|$ et si $z \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
5. si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

▷ *Preuve :*

◁

Theorème 3 : inégalité triangulaire

Soit z et z' deux complexes. Alors

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Avec égalité si et seulement si $z = 0$ ou $z' = \lambda z$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

III. Equations algébriques

1) Racine d'une fonction polynomiale

Définition : equation algébrique, racines

On appelle **fonction polynômiale** (ou polynôme) à coefficients complexes toute fonction P pour laquelle il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots a_n \in \mathbb{C}$ tels que,

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots a_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

Une **equation algébrique** est une équation de la formule $P(z) = 0$ où P est un polynôme.

Les solutions de l'équation algébrique sont appelées **racines** du polynôme.

Exemple :
Les trinômes du second degré sont des polynômes de la forme $P(z) = az^2 + bz + c$.
Chercher les racines de P, c'est résoudre l'équation algébrique $az^2 + bz + c = 0$.

Proposition 5 :

Soit P une fonction polynomiale à coefficients complexes et $\alpha \in \mathbb{C}$.
Alors α est racine de P si et seulement si on peut écrire $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$ avec Q une fonction polynomiale.

▷ *Preuve :*

◁

Exemple :
Soit $P(z) = z^3 - 2z^2 - 5z + 6$.

2) Racines carrées d'un nombre complexe

Définition : racines carrées d'un nombre complexe

On appelle **racine carrée** d'un complexe z tout complexe u tel que $u^2 = z$

Exemple :

- Comme $i^2 = -1$, i est une racine carrée de -1. Mais $(-i)^2 = -1$ également. Donc $-i$ est également une racine carrée de -1.
- De manière générale, si $a \in \mathbb{R}$ avec $a < 0$, les racines carrées complexes de a sont $i\sqrt{|a|}$ et $-i\sqrt{|a|}$.

Au secours ! PLUSIEURS RACINES CARRÉES ?

Dans l'ensemble des complexes, à l'exception de 0, tous les complexes ont exactement deux racines carrées opposées.
On parlera donc toujours bien **d'une** racine carré de z, et non pas de **la** racine carrée....

Chercher une racine carré d'un complexe sous forme algébrique demande la résolution d'un système :

Méthode : CALCUL DES RACINES CARRÉS D'UN COMPLEXE SOUS FORME ALGÉBRIQUE

Soit $z = a + ib$ un complexe non nul, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
Pour trouver $u \in \mathbb{C}$ tel que $u^2 = z$, on écrit $u = x + iy$ avec x et y réels.
Alors $u^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, et par unicité d'écriture dans $\mathbb{C}$

$$u^2 = z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 &= a \\ 2xy &= b \end{cases}$$

De plus, $|u|^2 = |z|$, donc $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$
L'utilisation de ces **trois équations** permet de trouver les deux couples (x, y) qui conviennent.

Exemple :
Soit $z = 3 - 4i$.

3) Equations du second degré dans $\mathbb{C}$

a) Forme canonique :

Définition : forme canonique

Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$ et soit P le polynôme définit par $P(z) = az^2 + bz + c$.
On dit que P et sous **forme canonique** si on a trouvé deux complexes α et β tel que

$$az^2 + bz + c = a(z + \alpha)^2 + \beta$$

exemples :

- $P(z) = z^2 + 2z + 2$

- $P(z) = z^2 + 3z + 2$

b) Racines d'un polynôme du second degré complexe :

On cherche à résoudre l'équation

$$az^2 + bz + c = 0$$

Theorème 4 : racines d'un trinôme complexe du second degré

Soient a, b, c trois complexes avec $a \neq 0$.
Soit l'équation :

$$(E) \qquad az^2 + bz + c = 0$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors

- Si $\Delta = 0$, l'equation (E) a une unique solution : $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$
- si $\Delta \neq 0$, en notant δ est une racine carré complexe de Δ, l'équation (E) a deux solutions distinctes :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$$

On a alors $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$.

Exemple :
Soit l'équation

$$(E) : 2z^2 - (9i + 1)z - 7 + 11i = 0$$

c) Racines complexes d'un polynôme réel :

Corolaire 1 : racines complexe d'un trinome réel

Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$.
Soit l'équation :

$$(E) \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors

- Si $\Delta = 0$, l'equation (E) a une unique solution réelle : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$
- si $\Delta < 0$, l'équation (E) a deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta > 0$, l'équation (E) a deux solutions réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemple :
Soit l'équation

$$(E) : x^2 + x + 1 = 0$$