DM4 - fonctions usuelles - sommes

2026-2027

Exercice 1 : La fonction tangente hyperbolique

On appelle "tangente hyperbolique" la fonction notée tanh, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier cette fonction, sa dérivée et sa bijection réciproque.

I) **Etude de tanh**

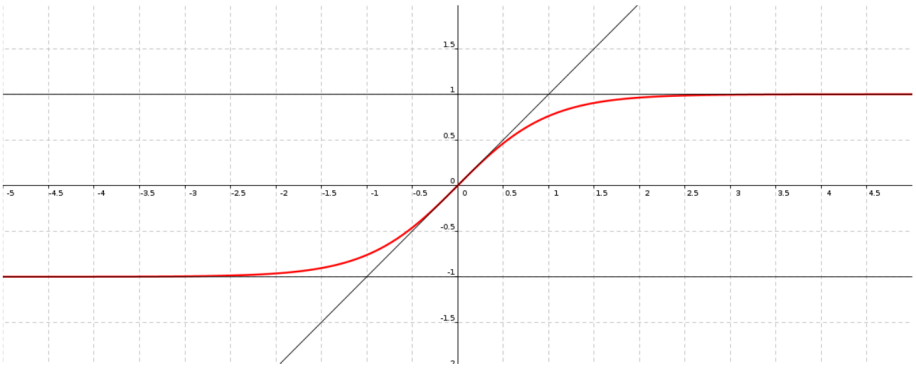
1. Etudier la parité de tanh.
2. Montrer que tanh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculez sa dérivée.
3. Donnez le tableau de variations de tanh et justifiez que $\lim\limits_{x\to+\infty} \tanh(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1$
4. Donner l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
5. Tracer l'allure du graphe de tanh ainsi que ses asymptotes éventuelles et sa tangente à l'origine.

II) **Etude de la réciproque**

1. Montrer que tanh est bijective de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I à déterminer.
2. On appelle argth la bijection réciproque de tanh.
   a) Sans calculer la dérivée, donner le tableau de variation de argth.
   b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tanh'(x) = 1 - \big(\tanh(x)\big)^2$.
   c) En déduire que argth est dérivable sur I et calculez $(\text{argth})'(x)$ pour tout $x \in I$.
3. Une particularité de tanh est que l'on peut en réalité calculer explicitement sa bijection réciproque :
   a) Vérifier que, pour tout réel x, $\quad \tanh(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.
   b) En déduire, en résolvant une équation, l'expression de $\text{argth}(y)$ en fonction de y, pour tout $y \in I$. (Vous devez reconnaitre une fonction rencontrer récemment...)
   c) Justifier la dérivabilité et retrouvez le résultat obtenu à la question `2(c)`.

Partie 1 : Etude de tanh

1. La fonction est définie sur un ensemble symétrique ($\mathbb{R}$) et on a $\tanh(-x) = \dfrac{e^{-x}-e^{x}}{e^{x}+e^{-x}}$, c'est à dire $\tanh(-x) = -\tanh(x)$. La fonction est donc impaire.
2. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x + e^{-x} > 0$. La fonction est donc définie sur $\mathbb{R}$, et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Le calcul donne :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tanh'(x) = \frac{(e^x+e^{-x})^2 - (e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}.$$
3. Le calcul de la dérivée donne $\tanh'(x) > 0$ pour tout x de l'intervalle $\mathbb{R}$, donc
   $\boxed{\text{L'application tanh est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$
   Pour les limites, plusieurs techniques possibles. Factoriser par e^x marche très bien, mais on peut aussi écrire :
   $$\tanh(x) = \frac{(e^x-e^{-x})\times e^{-x}}{(e^x+e^{-x})\times e^{-x}} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$
   et $\lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \tanh(x) = 1}$
   Par ailleurs,
   $$\tanh(x) = \frac{(e^x-e^{-x})\times e^{x}}{(e^x+e^{-x})\times e^{x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$
   et $\lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1}$
   Donc, la courbe $\mathcal{C}_{\tanh}$ a une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ quand $x \to +\text{inf}$ et une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ quand $x \to -\infty$.
4. On a $\quad f'(0) = 1 \quad$ et $\quad f(0) = 0$, donc, d'après la formule donnant l'équation de la tangente,
   $\boxed{\text{la tangente à la courbe } \mathcal{C}_f \text{ en } (0;0) \text{ a pour équation } y = x.}$
5. Il s'agit de tracer 3 droites (deux asymptotes et une tangente).



La courbe ressemble un peu à arctan...

Partie 2 : Etude de argth

1. On sait que tanh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème de la bijection monotone, elle est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\tanh(\mathbb{R})$. De plus, tanh est continue et

$$\lim_{x\to+\infty} \tanh(x) = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1.$$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\tanh(\mathbb{R}) =]-1;1[$.

En conclusion, $\boxed{\text{l'application tanh est bijective de } \mathbb{R} \text{ dans }]-1;1[.}$

2. a) On sait que la bijection réciproque est de même monotonie que la fonction de départ. D'où le tableau de argth :

x	-1		0		1
argth	$\|\|$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$	$\|\|$

le fait que $\text{argth}(0) = 0$ n'était pas demandé, mais cela provient naturellement de $\tanh(0) = 0$.

b) On sait que $\tanh'(x) = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$ et on calcule $1 - (\tanh(x))^2$ en mettant sous le même dénominateur : cela nous donne le même résultat.

Conclusion :

$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ \tanh'(x) = 1 - (\tanh(x))^2.}$

c) tanh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$, dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\tanh'(x) \neq 0$. Donc argth est dérivable sur $]-1;1[$ et pour tout $y \in]-1;1[$, on a

$$(\text{argth})'(x) = \frac{1}{\tanh'(argth(x))} = \frac{1}{1 - \left[\tanh(\text{argth}(x))\right]^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

car $\tanh(\text{argth}(x)) = x$ pour tout $x \in]-1;1[$. En conclusion :

$\boxed{\text{argth est dérivable sur }]-1;1[\text{ et, pour tout } x \in]-1;1[, \quad (\text{argth})'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}}$

3. a) Il suffit de multiplier numérateur et dénominateur par e^x et on trouve la formule proposée.

b) Soit $y \in]-1, 1[$ quelconque, fixé. Résolvons l'équation $\tanh(x) = y$ où $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\tanh(x) = y &\iff \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = y \\
&\iff e^{2x} - 1 = y(e^{2x}+1) \\
&\iff e^{2x}(1-y) = 1 + y \\
&\iff e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \\
&\iff 2x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall y \in]-1,1[, \qquad \operatorname{argth}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)}$$

Remarque : le fait que $y \in]-1;1[$ garantit que $\dfrac{1+y}{1-y} > 0$, donc qu'on peut appliquer le logarithme.

c) $y \longmapsto \dfrac{1+y}{1-y}$ est dérivable sur $]-1,1[$ et cette application est à valeurs dans $\mathbb{R}^{*+}$
de plus $X \longmapsto \dfrac{1}{2}\ln(X)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$
donc par composition : argth est dérivable sur $]-1,1[$
De plus, par dérivation d'une fonction composée :

$$(\operatorname{argth})'(y) = \frac{1}{2}\frac{\frac{1(1-y)-(1+y)(-1)}{(1-y)^2}}{\frac{1+y}{1-y}} = \frac{1}{2}\frac{2}{(1-y)^2} \times \frac{1-y}{1+y}$$

Après simplification, on retrouve bien :

$$\boxed{\text{pour tout } y \in]-1;1[\,, \quad (\operatorname{argth})'(y) = \frac{1}{1-y^2}}$$

Exercice 2 : Somme des cubes

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'objectif est d'obtenir, sans utiliser de récurrence, la formule donnant $\sum_{k=0}^{n} k^3$.

1. Que vaut $\sum_{k=0}^{n}((k+1)^4 - k^4)$?
2. Développez à l'intérieur de la somme ci dessus pour obtenir un lien entre $(n+1)^4$, $\sum_{k=0}^{n} k$, $\sum_{k=0}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} k^3$ et n.
3. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
4. En utilisant une technique similaire, déterminer (et démontrer sans récurrence) la formule donnant $\sum_{k=0}^{n} k^4$.

1. On peut appliquer directement la formule de telescopage, ou décomposer en deux sommes et faire un glissement d'indice.
   On obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}((k+1)^4 - k^4)) = (n+1)^4$
2. Par le binôme de Newton, on a
$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$
   Ainsi
$$(n+1)^4 = \sum_{k=0}^{n}((k+1)^4 - k^4)) = 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 6\sum_{k=0}^{n} k^2 + 4\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1$$
3. Il reste juste à tout calculer :
$$(n+1)^4 = 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$
   D'où
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^3 &= \frac{1}{4}\left((n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)\right)\\ &= \frac{1}{4}\left((n+1)((n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1)\right)\\ &= \frac{1}{4}(n+1)\left(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - 3n - 1\right)\\ &= \frac{1}{4}(n+1)n^2(n+1)\\ \sum_{k=0}^{n} k^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

4. De la même manière qu'en 1), on a

$$(n+1)^5 = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^5 - k^5$$

D'autre part, $(k+1)^5 = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$, ce qui donne donc

$$(n+1)^5 = \sum_{k=0}^{n} 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$$

On peut désormais isoler notre $\sum_{k=0}^{n} k^4$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^4 &= \frac{1}{5}\left((n+1)^5 - 10\sum_{k=0}^{n} k^3 - 10\sum_{k=0}^{n} k^2 - 5\sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} 1\right) \\
&= \frac{(n+1)^5}{5} - \frac{(n(n+1))^2}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n+1}{5} \\
&= \frac{n+1}{30}\left(6(n+1)^4 - 15n^2(n+1) - 10n(2n+1) - 15n - 6\right) \\
&= \frac{n+1}{30}\left(6n^4 + 24n^3 + 36n^2 + 24n - 15n^3 - 15n^2 - 20n^2 - 10n - 15n\right) \\
\sum_{k=0}^{n} k^4 &= \frac{n(n+1)}{30}\left(6n^3 + 9n^2 + n - 1\right)
\end{aligned}$$

Ce qui est la forme la plus simple à laquelle on peut arriver sans coup de pouce ou coup de génie : il reste un polynôme de degré 3, dont les racines ne sont pas évidentes.

On peut observer que $-\frac{1}{2}$ est racine de $6x^3 + 9x^2 + x - 1$, ce qui permet de factoriser par $(x + \frac{1}{2})$, ou plutôt par $(2x+1)$ pour éviter les fractions.

En revenant au entier, ça donne

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}}$$