TD$_{06}$ Commutation de mots

On considère un alphabet Σ et deux mots $(u, v) \in (\Sigma^*)^2$. On dit que u et v commutent si et seulement si $uv = vu$.

1. Montrer que u et v commutent si et seulement si ce sont des puissances d'un même mot, c'est-à-dire s'il existe $w \in \Sigma^*$ et $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tels que $\begin{cases} u & = & w^n \\ v & = & w^m \end{cases}$.

L'objectif de ce TD est de démontrer le théorème de Fine et Wilf, énoncé ci-dessous :

Théorème (Fine et Wilf (1965)). *Les mots u et v commutent si et seulement si les « mots » infinis u^∞ et v^∞ admettent un préfixe commun de longueur $|u| + |v| - PGCD(|u|, |v|)$.*

2. Démontrer l'implication directe du théorème de Fine et Wilf.

On veut maintenant démontrer l'implication réciproque. On note dans la suite $n = |u|$, $m = |v|$, $d = \mathrm{PGCD}(n, m)$ et p un préfixe commun à u et v de longueur $n + m - d$.

3. En considérant l'alphabet Σ^d, montrer que l'on peut se ramener au cas où $d = 1$.

On se place désormais dans le cas où $d = 1$. On va en fait démontrer que u et v sont des puissances **d'une même lettre**, ce qui conclut d'après la question 1.

4. Traiter le cas $n = m = 1$.

On suppose maintenant $1 \leqslant n \leqslant m - 1$. On note $p_1, p_2, \ldots, p_{n+m-1}$ les lettres du préfixe commun p.

5. Montrer qu'il suffit de démontrer que les $m - 1$ premières lettres de p sont égales, c'est-à-dire que pour tout $(i, j) \in [\![1, m-1]\!]^2$, $p_i = p_j$.
6. Justifier que
   — pour tout $i \in [\![1, m-1]\!]$, $p_{i+n} = p_i$;
   — pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, $p_{j+m} = p_j$.
7. Soit $(i, j) \in [\![1, m-1]\!]^2$ tel que $j - i \equiv n[m]$.
   (a) Montrer que $j - i = n + km$ avec $k \in \{-1, 0\}$.
   (b) En déduire que $p_i = p_j$.
8. Démontrer que les restes de la division euclidienne par m de n, $2n$, …, $(m-1)n$ sont **les** éléments de $[\![1, m-1]\!]$.
9. Déduire des questions précédentes que pour tout $(i, j) \in [\![1, m-1]\!]^2$, $p_i = p_j$.
10. Conclure.