CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

DS3 - Sujet Centrale - 29/11/23 - PC*

4 heures — Calculatrices autorisées

Problème 1 — *Autour des matrices de Toeplitz*

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n un entier naturel supérieur ou égal à 2, $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a \leqslant b$, $[\![a,b]\!]$ désigne l'ensemble $\{a, a+1, \dots, b-1, b\}$. $\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. L'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si $(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{K}^{2n-1}$, on note $T(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-2}, t_{n-1})$ la matrice

$$T(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-2}, t_{n-1}) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & \cdots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \ddots & & \vdots \\ t_{-2} & t_{-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 & t_2 \\ \vdots & & \ddots & t_{-1} & t_0 & t_1 \\ t_{-n+1} & \cdots & \cdots & t_{-2} & t_{-1} & t_0 \end{pmatrix}$$

Une telle matrice est appelée *matrice de Toeplitz* d'ordre n. On nomme $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de Toeplitz d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$\mathrm{Toep}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \exists (t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{K}^{2n-1},\ M = T(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-2}, t_{n-1})\}$$

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note χ_M son polynôme caractéristique défini par $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$. Si $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_p X^p$ ($p \in \mathbb{N}$) est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, $P(M)$ désigne la matrice

$$P(M) = a_0 I_n + a_1 M + \dots + a_p M^p$$

Le but de ce problème est l'étude de certaines propriétés des matrices de Toeplitz. La partie I traite de généralités sur les matrices de Toeplitz et de quelques exemples. La partie II, indépendante de la partie I, étudie un type particulier de matrices de Toeplitz — les matrices circulantes — en s'intéressant à leur structure et à leur diagonalisabilité.

I Généralités et quelques exemples

I.A – Généralités

Q 1. Montrer que $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En donner une base et en préciser la dimension.

Q 2. Montrer que si deux matrices A et B commutent ($AB = BA$) et si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, alors $P(A)$ et $Q(B)$ commutent.

I.B – Cas de la dimension 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ une matrice de Toeplitz de taille 2×2, où (a, b, c) sont des complexes.

Q 3. Donner le polynôme caractéristique de A.

Q 4. Discuter, en fonction des valeurs de (a, b, c), de la diagonalisabilité de A.

Réduction d'une matrice sous forme de Toeplitz

Q 5. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que M est semblable à une matrice de type $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ou de type $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, où α, β et γ sont des complexes avec $\alpha \neq \beta$.

Q 6. En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de Toeplitz.

I.C – Un autre cas particulier : les matrices tridiagonales

Une matrice tridiagonale est une matrice de Toeplitz de la forme $T(0, ..., 0, t_{-1}, t_0, t_1, 0, ..., 0)$, i.e. une matrice de la forme

$$A_n(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & & (0) \\ c & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & c & a \end{pmatrix}$$

où (a, b, c) sont des complexes.

On fixe (a, b, c) trois nombres complexes tels que $bc \neq 0$. On se propose de chercher les éléments propres de $A_n(a, b, c)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $A_n(a, b, c)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé.

Q 7. Montrer que si l'on pose $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$, alors $(x_1, ..., x_n)$ sont les termes de rang variant de 1 à n d'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 0$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad bx_{k+2} + (a - \lambda)x_{k+1} + cx_k = 0$$

Q 8. Rappeler l'expression du terme général de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en fonction des solutions de l'équation

$$bx^2 + (a - \lambda)x + c = 0 \tag{I.1}$$

Q 9. À l'aide des conditions imposées à x_0 et x_{n+1}, montrer que (I.1) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2.

Q 10. Montrer que r_1 et r_2 sont non nuls et que r_1/r_2 appartient à $\mathbb{U}_{n+1}$.

Q 11. En utilisant l'équation (I.1) satisfaite par r_1 et r_2, déterminer $r_1 r_2$ et $r_1 + r_2$. En déduire qu'il existe un entier $\ell \in [\![1, n]\!]$ et un nombre complexe ρ vérifiant $\rho^2 = bc$ tels que

$$\lambda = a + 2\rho \cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)$$

Q 12. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout k dans $[\![0, n+1]\!]$, $x_k = 2\mathrm{i}\alpha \dfrac{\rho^k}{b^k} \sin\left(\dfrac{\ell k\pi}{n+1}\right)$.

Q 13. Conclure que $A_n(a, b, c)$ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

II Matrices circulantes

Une matrice *circulante* est une matrice de Toeplitz $T(t_{-n+1}, ..., t_0, ..., t_{n-2}, t_{n-1})$, pour laquelle

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad t_k = t_{-n+k}$$

Elle est donc de la forme

$$T(t_1, t_2, ..., t_0, t_1, ..., t_{n-2}, t_{n-1}) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} \\ t_{n-1} & t_0 & \ddots & & t_{n-2} \\ t_{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 \\ t_1 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} & t_0 \end{pmatrix}$$

On pose $M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et $\omega_n = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$.

Q 14. Calculer $M_n^2, ..., M_n^n$. Montrer que M_n est inversible et donner un polynôme annulateur de M_n.

Q 15. Justifier que M_n est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres (exprimées à l'aide de ω_n) et donner une base de vecteurs propres de M_n.

Q 16. On pose $\Phi_n = (\omega_n^{(p-1)(q-1)})_{1\leqslant p,q\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Justifier que Φ_n est inversible et donner sans calcul la valeur de la matrice $\Phi_n^{-1} M_n \Phi_n$.

Q 17. Soit A une matrice circulante. Donner un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = P(M_n)$.

Q 18. Réciproquement, si $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer, à l'aide d'une division euclidienne de P par un polynôme bien choisi, que $P(M_n)$ est une matrice circulante.

Q19. Montrer que l'ensemble des matrices circulantes est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$, stable par produit et par transposition.

Q20. Montrer que toute matrice circulante est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres et une base de vecteurs propres.

Problème 2

Autour de la fonction Zêta

Objectifs et notations

Le fil conducteur du problème est l'étude de certaines questions liées à la fonction zêta, notée ζ, définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

— Dans la partie I, on introduit la fonction ζ et on étudie son allure (variations, limites, courbe représentative).

— La partie II étudie une fonction f définie comme la somme d'une série de fonctions et on en trouve une expression faisant intervenir la fonction ζ.

On rappelle la formule de Taylor avec reste intégral qui sera utile en question **38** :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I alors pour tout $(a,b) \in I^2$, on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

I. Fonction zêta

On note ζ la fonction de la variable réelle x définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

On note D_ζ son ensemble de définition.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^x}$.

Q21. Déterminer D_ζ.

Q22. Montrer que ζ est continue sur D_ζ.

Q23. La série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge-t-elle uniformément sur D_ζ ?

Q24. Étudier le sens de variations de ζ.

Q25. Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.

Q26. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que $\zeta(x) \underset{x \to 1^+}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$.

Q27. Donner l'allure de la courbe représentative de ζ.

II. Étude d'une fonction définie par une somme

Dans cette partie, f désigne la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} \right).$$

On note D_f l'ensemble de définition de f.

A - Ensemble de définition et variations

Q28. Montrer que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-n, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Q29. Montrer que pour tout $x \in D_f$, $f(x+1) = f(x) - \dfrac{1}{x+1}$.

Q30. Montrer que f est continue sur $]-1, +\infty[$ et sur tout intervalle du type $]-n-1, -n[$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations de f.

B - Équivalents

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Q31. Calculer $f(k)$.

Q32. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

Q33. Pour tout $x \in D_f$, vérifier que $x + k \in D_f$, puis calculer $f(x+k) - f(x)$.

Q34. En déduire un équivalent de f en $-k$. Quelles sont les limites à droite et à gauche de f en $-k$?

C - Écriture de f à l'aide de la fonction zêta

On considère la fonction définie par $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \zeta(k+1) x^k$.

Q35. Déterminer l'ensemble de définition D_φ de la fonction φ.

Q36. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D_f et calculer $f^{(k)}(x)$ pour tout $x \in D_f$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Q37. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in]-1, 1[, \quad \left| f^{(k)}(x) \right| \leqslant k! \left(A + \frac{1}{(x+1)^{k+1}} \right).$$

Q38. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer alors que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \zeta(k+1) x^k.$$