

AUTOUR DU VERRE

I. Modélisation d'un résonateur à quartz

N.B. Aucune connaissance sur les quartz et la piézo-électricité n'est requise pour traiter ce problème dans lequel les candidats sont guidés par de nombreuses questions indépendantes et progressives.

Le quartz est une forme particulière de cristal de silice. Il présente des propriétés physiques très intéressantes : la piézo-électricité. Quand on comprime un morceau de quartz dans une direction particulière, une tension apparaît aux bornes du cristal (c'est l'effet piézo-électrique).

Réciproquement, quand on applique une tension aux bornes d'un quartz, ce dernier se déforme proportionnellement à la tension appliquée (c'est l'effet piézo-électrique inverse). Ainsi, le quartz est très intéressant pour l'électronique car on parvient à réaliser des circuits oscillants, à base de résonateur à quartz, très stables dans le temps. Actuellement, le quartz est remplacé par certaines céramiques piézo-électriques.

1. Modèles mécanique et électrique du résonateur à quartz.

Un cristal de quartz est taillé sous forme de **pastille cylindrique mince**.

La base circulaire présente un diamètre $d = 1$ cm et l'épaisseur de la pastille est $e = 0,2$ mm. Des électrodes métalliques (en or généralement) sont déposées sur chacune des faces circulaires du quartz (on suppose que ces faces sont totalement métallisées) (figure 1). On parle d'électrodes de connexion. On a ainsi réalisé un condensateur plan.

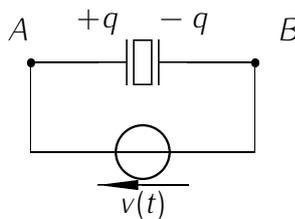


Figure 1 : schéma d'un quartz alimenté par une tension $v(t)$.

D'un point de vue **mécanique**, lorsque l'on soumet le disque piézo-électrique à une tension sinusoïdale $v(t) = V_m \cos \omega t$, il va être, dans le cadre d'une approximation linéaire, le siège d'une vibration mécanique sinusoïdale sous l'effet d'une force extérieure proportionnelle à cette tension.

Modélisation proposée : un élément de masse m du corps piézo-électrique, placé à une distance x de son point de repos, est soumis aux forces suivantes, toutes orientées selon un axe (Ox) que l'on ne précise pas ici :

- une force de rappel type élastique $-kx$ ($k > 0$) qui a pour origine la rigidité du matériau,
- des frottements supposés proportionnels à la vitesse et de la forme $-h \frac{dx}{dt}$ avec ($h > 0$),
- une force due à l'effet piézo-électrique $\beta v(t)$ avec ($\beta > 0$),
- le poids est négligé.

(a) En appliquant le principe fondamental de la dynamique au petit élément de masse m dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ en supposant que le mouvement se fasse selon l'axe (Ox) .

Q1

D'un point de vue **électrique**, la charge totale q apparaissant sur les électrodes planes a deux origines :
 — les deux faces planes du disque forment un condensateur de capacité C_P , d'où une charge $q_1(t)$,
 — l'effet piézo-électrique provoque l'apparition d'une charge q_2 proportionnelle à x : $q_2(t) = \gamma \cdot x(t)$ avec γ constant.

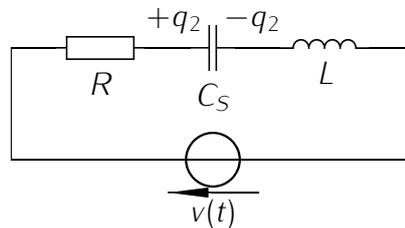
(b) On montre que la capacité d'un condensateur plan vaut $C_P = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot S}{e}$ où S est la surface d'une électrode, e l'épaisseur du condensateur, ϵ_0 la permittivité du vide (sa valeur est $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F.m⁻¹) et ϵ_r une constante valant pour le quartz $\epsilon_r = 2,3$.

Q2

- Estimer alors la capacité C_P appelée capacité de connexion.

- Quelle est la relation entre la charge q_1 , la capacité C_P et la tension $v(t)$?

- Q3 (c) En reprenant l'équation différentielle obtenue pour $x(t)$, écrire l'équation différentielle vérifiée par la charge $q_2(t)$.
- (d) Considérons le circuit représenté sur la figure 2 ci-dessous.

Figure 2 : circuit R, L, C_S série.

Q4 Montrer que la charge $q_2(t)$ est équivalente à la charge d'un condensateur de capacité C_S dans le circuit série R, L, C_S dont la tension aux bornes est $v(t)$. On donnera alors les expressions de R, L et C_S en fonction de m, h, β, γ et k .

2. Étude de l'impédance équivalente du quartz.

Dans cette partie, on néglige la résistance R du quartz. Le schéma électrique simplifié est alors donné sur la figure 3. Pour les applications numériques, on prendra $L = 500$ mH, $C_S = 0,08$ pF et $C_P = 8$ pF.

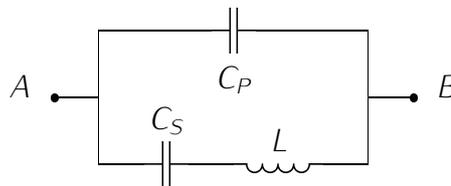


Figure 3 : modèle électrique d'un quartz.

On se placera toujours en régime sinusoïdal forcé (les grandeurs dépendront de la pulsation ω).

- Q5 (a) Calculer alors l'impédance complexe du quartz, vue entre les bornes A et B . On l'écrira sous la forme

$$Z_{AB} = - \left[\frac{j}{\alpha \cdot \omega} \right] \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}}$$

où j est nombre imaginaire pur tel que $j^2 = -1$.

On donnera, en fonction de L, C_P et C_S les expressions de α, ω_a^2 et ω_r^2 .

Montrer aussi que $\omega_a^2 > \omega_r^2$.

On pourra admettre les résultats de cette question pour poursuivre la résolution du problème.

- Q6 (b) Donner les valeurs numériques des fréquences f_a et f_r correspondant respectivement aux pulsations ω_a et ω_r .
- Q7 (c) Étudier le comportement inductif ou capacitif du quartz en fonction de la fréquence. On rappelle qu'un dipôle a un comportement inductif (respectivement capacitif) si la partie imaginaire de son impédance est positive (respectivement négative).
- (d) Tracer l'allure de $Z_{AB} = |Z_{AB}|$, module de l'impédance complexe du quartz, en fonction de la fréquence.

- Q8 3. Étude expérimentale de la résonance d'un quartz.

On veut tracer expérimentalement la courbe donnant l'impédance du quartz en fonction de la fréquence d'excitation. On dispose d'un générateur basses fréquences pouvant délivrer une tension sinusoïdale d'amplitude réglable. Le GBF possède une résistance interne R_g .

On dispose d'une résistance R_v variable, d'un quartz et d'un oscilloscope.

On réalise alors le montage de la figure 4 suivante.

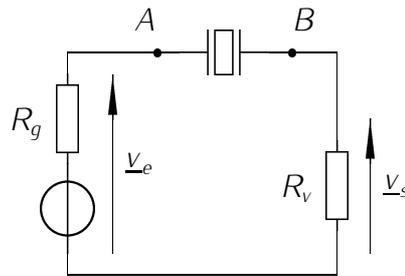


Figure 4 : montage expérimental pour l'étude de la résonance du quartz.

- Q9 (a) Calculer le rapport de la tension de sortie v_s à celle d'entrée v_e : $H = \frac{v_s}{v_e}$ en fonction de R_v et de Z_{AB} .
- Q10 (b) On choisit, pour chaque fréquence, la résistance R_v de telle façon que $|H| = 1/2$. Que vaut alors le module de l'impédance du quartz en fonction de R_v ?
- Q11 (c) Autour du pic de résonance d'intensité situé vers 796 kHz, on mesure une bande passante de 50 Hz. Quelle est la valeur numérique du facteur de qualité Q du quartz défini comme le rapport de la fréquence de résonance à la largeur de la bande passante ? Commenter cette valeur. En supposant que le facteur de qualité soit donné par la relation $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ (ω_0 étant la pulsation de résonance), estimer la valeur de la résistance R du quartz.

II. Principe d'une montre à quartz :

Une horloge est composée d'un oscillateur plus ou moins stable dans le temps et d'un système de comptage des oscillations. Le quartz utilisé présente une fréquence de résonance de 32768 Hz. Cela signifie que 32768 fois par seconde une impulsion électrique est émise par le circuit oscillant. Un dispositif électrique doit compter les impulsions.

Ces compteurs fonctionnent dans la technologie binaire (suite de 0 et de 1). Une impulsion électrique correspond à la valeur 1. La valeur 0 correspond à aucun signal électrique.

1. Compteur modulo 2.

Un tel compteur délivre une impulsion de sortie dès qu'il a compté 2 impulsions à son entrée. Si en entrée d'un tel compteur on envoie le signal à 32768 Hz délivré par le circuit à quartz, quelle est la fréquence du signal de sortie du compteur modulo 2 ?

2. Succession de compteurs modulo 2.

Écrire le nombre 32768 sous la forme 2^k où k est un entier naturel. Combien de compteurs modulo 2 faut-il alors mettre en cascade pour commander le chiffre des secondes ?

CONTINUITÉS, DISCONTINUITÉS EN ÉLECTRICITÉ

I. Généralités

1. Un circuit électrique comprend un résistor de résistance R , une bobine d'inductance L et un condensateur de capacité C , toutes constantes.

Expliquez pourquoi la tension aux bornes du condensateur et l'intensité du courant dans la bobine sont des fonctions continues du temps.

2. Expliquer en détail la méthode à utiliser pour mesurer la résistance interne r d'un générateur de tension de force électromotrice E . Quelle valeur obtient-on couramment ?

Quelle serait la valeur obtenue si on avait affaire à un générateur idéal de tension ? Justifiez.

II. Régime sinusoïdal forcé

On considère le circuit de la figure 2 (ci-après à gauche) alimenté par un générateur de tension alternative sinusoïdale du type $e(t) = E \cos \omega t$. On se place ici en régime sinusoïdal forcé, on a alors $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$.

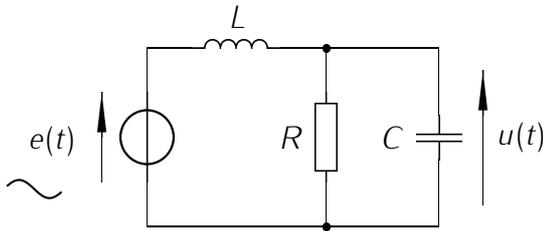


FIGURE 2

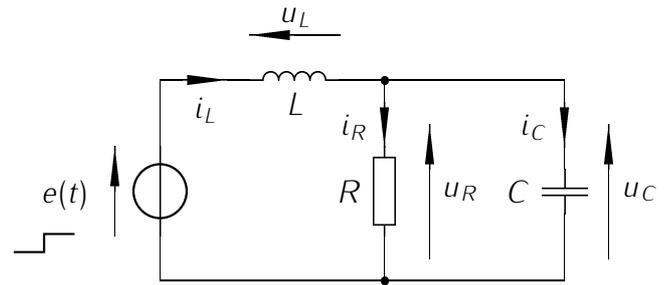


FIGURE 3

1. On associe à $e(t)$, le complexe $\underline{e}(t) = E e^{j\omega t}$ et $\underline{u}(t) = \underline{U} e^{j\omega t}$ à $u(t)$.

Q16 Déterminer l'expression de $\underline{u}(t)$ en fonction de R, L, C, ω et $\underline{e}(t)$.

On pourra faire apparaître un pont diviseur de tension ou appliquer la loi des nœuds en terme de potentiels en régime sinusoïdal forcé.

Q17 2. En déduire \underline{U} puis U et φ .

3. Déduire de 1. l'équation liant $\underline{u}(t)$ à $\underline{e}(t)$, l'écrire sous la forme d'un polynôme en $j\omega$

$$D_2(j\omega)^2 \underline{u}(t) + D_1(j\omega) \underline{u}(t) + D_0 \underline{u}(t) = N_0 \underline{e}(t)$$

Q18 On donnera l'expression des coefficients constants D_2, D_1, D_0 et N_0 .

Q19 4. En déduire l'équation différentielle liant $e(t)$ et $u(t)$.

III. Régime transitoire

1. On considère maintenant le circuit de la figure 3 (ci-dessus à droite) alimenté par un générateur d'échelon dont la tension est $e(t) = 0$ pour $t < 0$ et $e(t) = E$ pour $t > 0$.

À la date $t = 0^-$, toutes les grandeurs électriques sont nulles : $u_L = u_R = u_C = 0$ et $i_L = i_R = i_C = 0$.

Q20 Déterminer l'équation différentielle liant $u_C(t)$ et $e(t)$, comparez avec celle obtenue en II. 4. et commenter.

2. Montrer que le type de régime dépend de la valeur de la résistance R , comparée à celle d'une résistance critique R_c dont on donnera l'expression.

Q21

L'observation d'oscillations amorties a-t-elle lieu pour $R > R_c$ ou pour $R < R_c$? Interprétez physiquement.

Q22

3. Donner en les justifiant les valeurs des six grandeurs électriques u_L, u_R, u_C, i_L, i_R et i_C à la date $t = 0^+$ puis au bout d'un temps très long, c'est à dire à la fin du régime transitoire.

Q23

On présentera les résultats sous forme d'un tableau.

Q24

4. Déterminer l'expression de $u_C(t)$ dans le cas où $R = R_c$. On posera $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Q25

5. Tracer l'allure de la courbe $u_C(t)$ dans le cas où $R = R_c$.

IV. Déformation d'un condensateur

On considère un condensateur plan formé de deux plaques de surface S très grande, séparées par une tranche de vide d'épaisseur e très petite de sorte que la capacité du condensateur est $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$ où ϵ_0 est une constante.

On suppose que l'épaisseur diminue brusquement de e à $e' = \frac{e}{2}$.

Quelles sont dans ce cas les grandeurs électriques (capacité, charge, tension, énergie électrique) encore continues et par quels coefficients respectifs sont multipliés les autres ?

Q26 Justifier quantitativement et interpréter physiquement les réponses.

Fin

QUARTZ ET ÉLECTRONIQUE.

I. Modélisation d'un résonateur à quartz

1. Modèles mécanique et électrique du résonateur à quartz.

- (a) On applique le principe fondamental de la dynamique au petit élément de masse m dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen : $m\vec{a}(M/\mathcal{R}_G) = \sum \vec{F}$ et par projection sur l'axe (Ox) , d'après les données de l'énoncé :

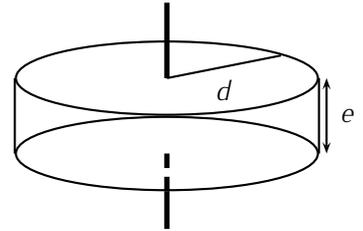
$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} + \beta v(t) \text{ soit } \boxed{\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{\beta}{m}v(t).}$$

- (b) Ici, la surface de l'électrode plane est $S = \pi \frac{d^2}{4}$ avec $d = 1$ cm le diamètre et $C_p = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r d^2}{4e} \simeq 8,0 \cdot 10^{-12}$ F, soit

$$\boxed{C_p \simeq 8,0 \text{ pF}}$$

- La relation est celle qui lie la charge portée par l'armature positive à la tension qui règne entre les plaques d'un condensateur parfait, soit, comme $v(t)$ est orientée de l'armature négative à l'armature positive,

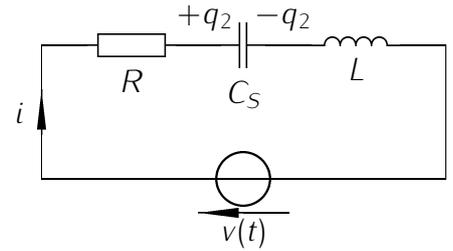
$$\boxed{q_1 = C_p \cdot v(t).}$$



- (c) L'énoncé donne $q_2 = \gamma x$ d'où $x = \frac{q_2}{\gamma}$ et en reprenant l'équation différentielle obtenue en (a), on écrit

$$\text{directement : } \boxed{\ddot{q}_2 + \frac{h}{m}\dot{q}_2 + \frac{k}{m}q_2 = \frac{\beta\gamma}{m}v(t).}$$

- (d) En appliquant une loi des mailles (circuit représenté ci-contre), $v(t) - Ri - \frac{q_2}{C_s} - L \frac{di}{dt} = 0$ avec $i = \frac{dq_2}{dt}$, soit $v(t) = R \frac{dq_2}{dt} + \frac{q_2}{C_s} + L \frac{d^2q_2}{dt^2}$ et $\boxed{\ddot{q}_2 + \frac{R}{L}\dot{q}_2 + \frac{q_2}{LC_s} = \frac{v(t)}{L}}$: on retrouve le même type d'équation différentielle, cela traduit un comportement équivalent.



$$\text{Par identification des coefficients, } \begin{cases} \frac{1}{L} = \frac{\beta\gamma}{m} & \Rightarrow & \boxed{L = \frac{m}{\beta\gamma}} \\ \frac{1}{LC_s} = \frac{k}{m} & \Rightarrow & C_s = \frac{m}{kL} \Rightarrow \boxed{C_s = \frac{\beta\gamma}{k}} \\ \frac{R}{L} = \frac{h}{m} & \Rightarrow & R = \frac{h}{m}L \Rightarrow \boxed{R = \frac{h}{\beta\gamma}} \end{cases}$$

2. Étude de l'impédance équivalente du quartz.

- (a) En RSF, d'après la figure de l'énoncé, l'impédance complexe du quartz, vue entre les bornes A et B est : $\underline{Z}_{AB} = \frac{Z_{C_p} \cdot (Z_L + Z_{C_s})}{Z_{C_p} + Z_L + Z_{C_s}}$:

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{\frac{1}{jC_p\omega} \times (jL\omega + \frac{1}{jC_s\omega})}{\frac{1}{jC_p\omega} + jL\omega + \frac{1}{jC_s\omega}} = -\frac{j}{C_p\omega} \cdot \frac{-LC_s\omega^2 + 1}{-LC_s\omega^2 + \frac{C_s}{C_p} + 1} = -\frac{j}{\omega} \cdot \frac{1 - LC_s\omega^2}{(C_s + C_p)(1 - \frac{LC_s C_p \omega^2}{C_s + C_p})}$$

$$\underline{Z}_{AB} = -\left[\frac{j}{\alpha \cdot \omega} \right] \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}} \text{ avec } \boxed{\alpha = C_p + C_s, \omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC_s}} \text{ et } \omega_a = \sqrt{\frac{C_p + C_s}{LC_s C_p}}}$$

$$\text{On a bien } \boxed{\omega_a^2 = \frac{C_s + C_p}{LC_s C_p} = \frac{1}{LC_s} + \frac{1}{LC_p} = \omega_r^2 + \frac{1}{LC_p} > \omega_r^2.}$$

- (b) Applications numériques : $\boxed{f_a = \frac{\omega_a}{2\pi} \simeq 800 \text{ kHz}}$ et $\boxed{f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} \simeq 796 \text{ kHz}}$.

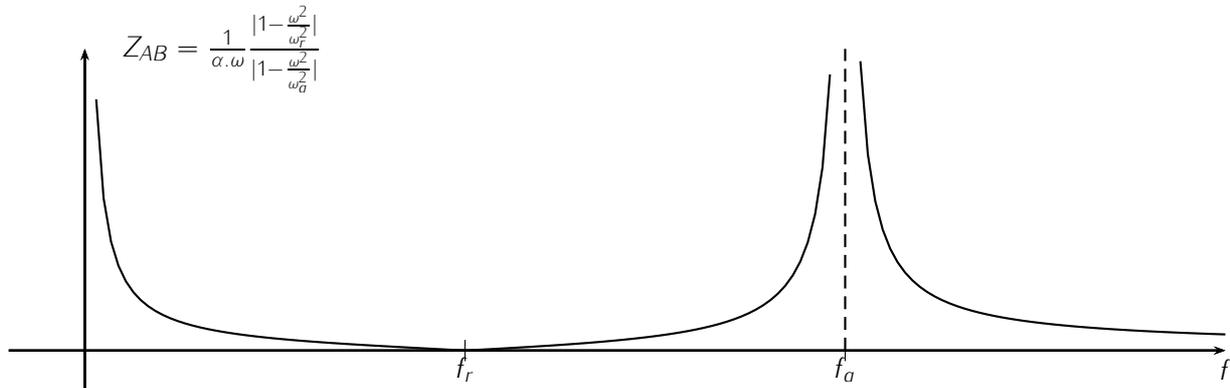
- (c) On étudie le signe de $\Im(\underline{Z}_{AB}) = -\left[\frac{1}{\alpha \cdot \omega} \right] \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}}$ qui a le signe opposé de $\frac{N(\omega)}{D(\omega)}$ si on pose $N(\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}$ et $D(\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}$. On peut alors dresser le tableau suivant :

ω	0	ω_r	ω_a	$+\infty$
$N(\omega)$		positif		négatif
$D(\omega)$		positif		négatif
$\Im(Z_{AB})$		négatif	positif	négatif
Conclusion		capacitif	inductif	capacitif

Q34

(d) Pour tracer l'allure de $Z_{AB} = |Z_{AB}(f)|$, on utilise les considérations suivantes :

- Z_{AB} tend vers $+\infty$ quand $f \rightarrow 0$ et quand $f \rightarrow \omega_a$: asymptotes verticales.
- $Z_{AB} = 0$ quand $f = f_r < f_a$.



3. (a) Le montage représenté ci-dessous est un pont diviseur de tension et

$$H_V = \frac{v_s}{v_e} = \frac{R_V}{R_V + Z_{AB}}$$

Q35

(b) Quand $|H| = \frac{R_V}{|R_V + Z_{AB}|} = 1/2$, on a $2R_V = |R_V + Z_{AB}|$.

Or, $Z_{AB} = jZ_{AB}$ est un imaginaire pur et R_V un réel donc $|R_V + Z_{AB}|^2 = \Re^2(R_V + Z_{AB}) + \Im^2(R_V + Z_{AB}) = R_V^2 + Z_{AB}^2$ et $|H| = \frac{1}{2} \iff \frac{R_V^2}{R_V^2 + Z_{AB}^2} = \frac{1}{4} \iff 4R_V^2 = R_V^2 + Z_{AB}^2$ c'est à dire pour

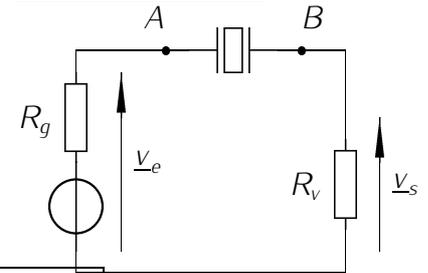
$$Z_{AB} = |Z_{AB}| = \sqrt{3}R_V.$$

Q36

(c) On détermine Q le facteur de qualité à partir de f_0 la fréquence

de résonance et Δf la bande passante : $Q = \frac{f_0}{\Delta f} = 16000$ ce qui est énorme !

Q37



C'est pourquoi, en couplant cet oscillateur à un système d'horlogerie, la fréquence à laquelle oscillera le quartz restera quasiment invariable, d'où une précision remarquable.

La relation $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ donne immédiatement $R = \frac{L\omega_0}{Q} \simeq 157 \Omega$.

II. Principe d'une montre à quartz :

1. Compteur modulo 2.

Le compteur délivre une impulsion de sortie dès qu'il a compté 2 impulsions à son entrée, comme on envoie le signal à $f_e = 32768$ Hz (nombre d'impulsions par seconde) en entrée, la fréquence du signal de sortie

est $f_s = \frac{f_e}{2} = 16384$ Hz.

Q38

Q39

2. Succession de compteurs modulo 2.

On cherche k tel que $32768 = 2^k \iff \ln 32768 = \ln 2^k = k \ln 2$ d'où $k = \frac{\ln 32768}{\ln 2} = 15$

On en déduit qu'il faut **15 compteurs modulo 2** pour obtenir un signal de fréquence 1 Hz, c'est à dire de période 1 s pour commander le chiffre des secondes.

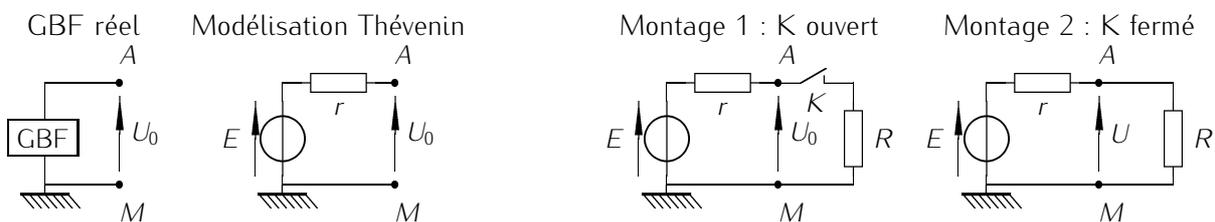
CONTINUITÉS, DISCONTINUITÉS EN ÉLECTRICITÉ

I. Généralités

1. La puissance reçue par un dipôle, dérivée temporelle de l'énergie qu'il reçoit, ne peut être infinie. Dans le cas d'un condensateur, $E_C(t) = \frac{1}{2} C u_C(t)^2$ est l'énergie qu'il contient à l'instant t si la tension à ses bornes est $u_C(t)$. Si $u_C(t)$ subissait une discontinuité, il en serait de même pour $E_C(t)$, la puissance serait alors infinie, ce qui est physiquement impossible. On en déduit que $u(t)$ la tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas subir de discontinuité.

De même, l'énergie contenue à l'instant t dans une bobine est $E_L(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t)$ quand le courant qui la parcourt est $i_L(t)$. Comme $E_L(t)$ ne peut pas subir de discontinuité, $i_L(t)$ est aussi une fonction continue au sens mathématique du terme.

2. Les figures suivantes expliquent la méthode de mesure de la résistance interne d'un générateur :



On réalise le montage 1. avec R une résistance variable, un interrupteur (ou un simple fil qu'on branche ou débranche) et le générateur réel.

Tant que K est ouvert, le générateur ne débite aucun courant et délivre une tension continue de valeur $U_0 = E$ que l'on mesure à l'aide d'un voltmètre.

On ferme ensuite K (montage 2.) et on cherche par tâtonnement la valeur de R telle que $U \simeq \frac{U_0}{2}$. Comme on a un pont diviseur de tension, $U = \frac{R}{R+r} E = \frac{R}{R+r} U_0 = \frac{U_0}{2}$ quand $R = r$.

Il ne reste plus qu'à mesurer R à l'aide d'un ohmmètre. Pour un GBF classique, on obtiendra $r \simeq 50 \Omega$.

Pour un générateur idéal de tension on devrait avoir $r_{id} = 0$ car la tension aux bornes du générateur $U = E - rI$ doit rester constante pour tout I .

II. Régime sinusoïdal forcé.

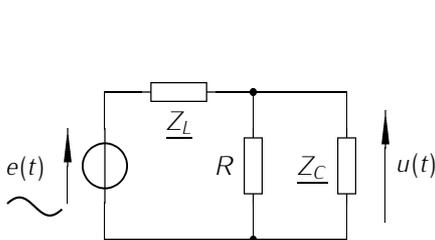


FIGURE 2

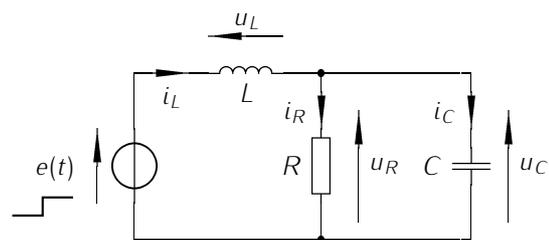


FIGURE 3

1. En associant R et C en parallèle, on reconnaît un pont diviseur de tension pour lequel

$$\underline{u}(t) = \frac{Z_{R||C}}{Z_{R||C} + Z_L} e(t) = \frac{1}{1 + Y_{L||C} \cdot Z_L} e(t) \text{ où } Y_{L||C} = \frac{1}{Z_{R||C}} = \frac{1}{R} + jC\omega \text{ et } Z_L = jL\omega \text{ d'où}$$

$$\underline{u}(t) = \frac{e(t)}{1 + jL\omega/R - LC\omega^2}$$

2. En écrivant $\underline{u}(t) = \underline{U} \cdot e^{j\omega t}$ et $e(t) = E_m \cdot e^{j\omega t}$, on en déduit $\underline{U} = \frac{E}{1 + jL\omega/R - LC\omega^2}$ et

$$U = |\underline{U}| = \frac{E}{|R + jL\omega/R - LC\omega^2|} = \frac{E}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (\frac{L\omega}{R})^2}}$$

De même, $\varphi = \arg(\underline{U}) = \arg(E) - \arg(1 + jL\omega/R - LC\omega^2)$ soit $\tan \varphi = -\frac{L\omega}{R(1 - LC\omega^2)}$ or, $\sin \varphi$ a le signe opposé de $\frac{L\omega}{R}$ donc $\sin \varphi < 0$ et $-\pi \leq \varphi \leq 0$ d'où $\varphi = -\arctan \frac{L\omega}{R(1 - LC\omega^2)}$ si $\omega \leq \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\varphi = -\pi - \arctan \frac{L\omega}{R(1 - LC\omega^2)}$ si $\omega > \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

3. De l'équation obtenue au 1., on tire

$$\underline{u}(t)(R + jL\omega - RLC\omega^2) = \underline{Re}(t) \Rightarrow RLC(j\omega)^2 \underline{u}(t) + L(j\omega) \underline{u}(t) + R \underline{u}(t) = \underline{Re}(t)$$

Q44 soit par identification avec $D_2(j\omega)^2 \underline{u}(t) + D_1(j\omega) \underline{u}(t) + D_0 \underline{u}(t) = N_0 \underline{e}(t)$, $D_2 = RLC$, $D_1 = L$ et $D_0 = N_0 = R$.

4. Quand on écrit une équation en notation complexe, toute multiplication par $j\omega$ correspond à une dérivation temporelle $\frac{d}{dt}$, une multiplication par $(j\omega)^2 = -\omega^2$ à $\frac{d^2}{dt^2}$.

Q45 On en déduit qu'en notation réelle $Ru(t) + L \frac{du(t)}{dt} + RLC \frac{d^2u(t)}{dt^2} = Re(t)$ soit encore

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{LC} = \frac{e(t)}{LC}$$

III. Régime transitoire

1. À partir de $t = 0^+$, on peut écrire (loi des mailles) $E - u_L - u_C = 0 \iff E = L \frac{di_L}{dt} + u_C$ avec, d'après la loi des nœuds, $i_L = i_R + i_C = \frac{u_C}{R} + C \frac{du_C}{dt}$.

Q46 On obtient ainsi directement $E = L \frac{d}{dt} \left[\frac{u_C}{R} + C \frac{du_C}{dt} \right] + u_C$ soit $\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = \frac{E}{LC}$.

On retrouve la même équation que dans la question précédente ce qui est parfaitement logique puisqu'il s'agit de la même tension prise au même endroit du même circuit.

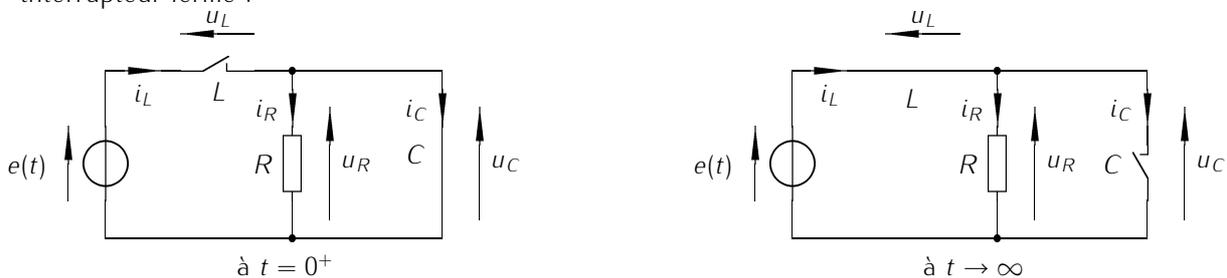
2. L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle est $x^2 + \frac{1}{RC}x + \frac{1}{LC} = 0$ dont le déterminant est $\Delta = \frac{1}{R^2C^2} - \frac{4}{LC}$. Le type de régime observé dépend du signe de Δ . On a par exemple un régime pseudo périodique caractérisé par des oscillations

Q47 si $\Delta < 0 \iff \frac{1}{R^2C^2} > \frac{4}{LC} \iff R > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} = R_c$

En effet, si R est grand, à la limite infini, le résistor est équivalent à un interrupteur ouvert et le circuit se résume à un circuit LC , c'est à dire sans élément dissipatif, on a alors un régime harmonique.

Q48

3. Représentons le circuit équivalent à $t = 0^+$ en respectant la continuité de i_L et celle de u_C puis le circuit au bout d'un temps infini, le condensateur est alors équivalent à un interrupteur ouvert et la bobine à un interrupteur fermé :



Q49 On en déduit, directement :

	u_L	u_C	u_R	i_L	i_C	i_R
$t = 0^+$	E	0	0	0	0	0
$t \rightarrow \infty$	0	E	E	E/R	0	E/R

4. Dans le cas d'un régime critique ($R = R_c$, facteur de qualité $Q = \frac{1}{2}$), l'équation différentielle prend la forme $\ddot{u}_C + 2\omega_0 \dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 e(t) = \omega_0^2 E$ pour $t \geq 0$.

La solution est de la forme $u_C(t) = (A + Bt). \exp -\omega_0 t + E$ (solution de l'équation homogène + solution particulière).

On détermine les constantes d'intégration en utilisant les conditions initiales, $u_C(0^+) = 0 = (A+0).1 + E = 0 \Rightarrow A = -E$.

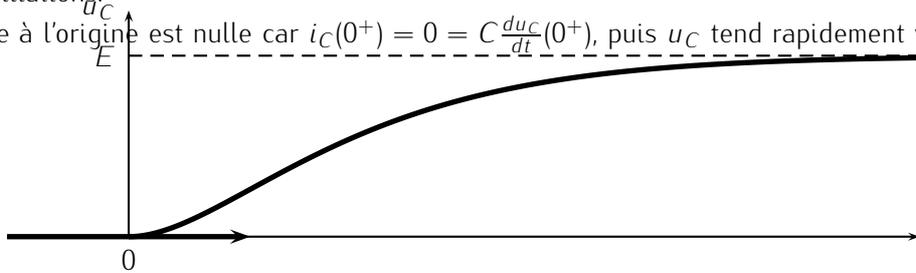
De même, $\frac{du_C(t)}{dt} = B.e^{-\omega_0 t} - \omega_0(A + Bt).e^{-\omega_0 t} + 0$ et

à $t = 0^+$, $\left[\frac{du_C(t)}{dt} \right]_0 = \frac{i_C(0^+)}{C} = B - \omega_0 A \Rightarrow B = \omega_0 A = -\omega_0 E$.

Q50 Finalement, $u_C(t) = E[1 - (1 + \omega_0 t).e^{-\omega_0 t}]$

5. Dans le cas où $R = R_c$, on assiste à un régime transitoire du type critique caractérisé par une durée courte et sans oscillations.

Q51 La tangente à l'origine est nulle car $i_C(0^+) = 0 = C \frac{du_C}{dt}(0^+)$, puis u_C tend rapidement vers $u_C(\infty) = E$.



6. On donne $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$. Lorsque e passe de $e(0^-)$ à $e(0^+) = \frac{1}{2}e(0^-)$, comme S et ϵ_0 restent constants,

$C(0^+) = 2C(0^-)$: discontinuité de $C(t)$.

L'énergie électrique E_C ne peut pas subir de discontinuité (car $\frac{dE_C}{dt} = P$ la puissance ne peut être infinie),

on a donc $E_C(0^+) = E_C(0^-)$: continuité de $E_C(t)$.

On a également $E_C = \frac{1}{2} C u_C^2$ d'où $E_C(0^+) = \frac{1}{2} C(0^+) u_C^2(0^+)$ et $E_C(0^-) = \frac{1}{2} C(0^-) u_C^2(0^-)$.

En réinjectant les égalités précédentes, $\frac{1}{2} 2C(0^-) u_C^2(0^+) = \frac{1}{2} C(0^-) u_C^2(0^-)$ soit

$u_C(0^+) = \frac{1}{\sqrt{2}} u_C(0^-)$: discontinuité de $u_C(t)$ et enfin, $q(0^+) = C(0^+) u_C(0^+) = 2C(0^-) \frac{1}{\sqrt{2}} u_C(0^-) = \sqrt{2} C(0^-) u_C(0^-)$

Q52 soit $q(0^+) = \sqrt{2} q(0^-)$: discontinuité de $q(t)$.