6.2 Ondes acoustiques-Exercice 11

On modélise un tuyau d'orgue par un tube cylindrique d'axe Ox, de section S et de longueur L ouvert à l'air libre à ses deux extrémités. Le tuyau contient de l'air à la pression atmosphérique moyenne P_0.
La vitesse du son dans le milieu vaut c = 340 m.s^{-1}.
On recherche le champ de pression p(x,t) de l'onde dans le tuyau comme une superposition d'ondes stationnaires de la forme $A\cos(\omega t+\varphi)\cos(kx+\phi)$.

a-Justifier physiquement la présence d'un nœud de surpression à chaque extrémité du tuyau.

b-Rappeler l'équation vérifiée par p(x,t). En déduire la relation entre k, ω et c.

c-Montrer que seules certaines ondes stationnaires sont possibles et exprimer leur fréquence f_p en fonction de L, c et un entier p.

d-Tracer l'allure du spectre du son émis. Identifier la fréquence fondamentale et les harmoniques. Que détermine l'amplitude des harmoniques ?

En musique, la fréquence fondamentale définit le nom de la note jouée par l'instrument. La gamme tempérée est constituée d'octaves.
Chaque octave rassemble douze notes séparées par un demi-ton.

Note	Do	Do #	Ré	Ré #	Mi	Fa	Fa #	Sol	Sol #	La	La #	Si
Fréquence	$f^{(0)}$	$f^{(1)}$	$f^{(2)}$	$f^{(3)}$	$f^{(4)}$	$f^{(5)}$	$f^{(6)}$	$f^{(7)}$	$f^{(8)}$	$f^{(9)}$	$f^{(10)}$	$f^{(11)}$

Les fréquences des notes sont les termes d'une suite géométrique de raison $2^{1/12}$. Ainsi : $f^{(n+1)} = 2^{1/12}f^{(n)}$.
La référence de fréquence est donnée par la fréquence du La_3 de la troisième octave à 440 Hz.

e-Exprimer la fréquence $f^{(n)}$ en fonction de $f^{(0)}$ dans une octave donnée. En déduire les valeurs numériques des fréquences du do_3, du do_2 et du do_1.

f-Dans un orgue chaque note n est jouée par un tuyau de longueur L_n. La note la plus grave jouée est un fa_2.
A quel tuyau correspond sur la photo la note la plus grave ? En déduire sa longueur L_0.
Exprimer la longueur L_n du tuyau jouant la note n en fonction de L_0 et n.
Prévoir la longueur du plus petit tuyau de la photo.

6.2 Ondes acoustiques-Exercice 11

---

a-Chaque extrémité du tuyau débouche à l'air libre. Il n'est donc pas possible de comprimer la dernière tranche d'air car les particules fluides sont libres de sortir. La pression reste égale à P_0.

Donc : $\boxed{p(0,t) = 0 \text{ et } p(L,t) = 0}$

b-<u>Equation d'onde classique de D'Alembert</u> à une dimension : $\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x,t)}$

En reportant $p(x,t) = A\cos(\omega t+\varphi)\cos(kx+\phi)$ dans cette équation, on a : $\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$

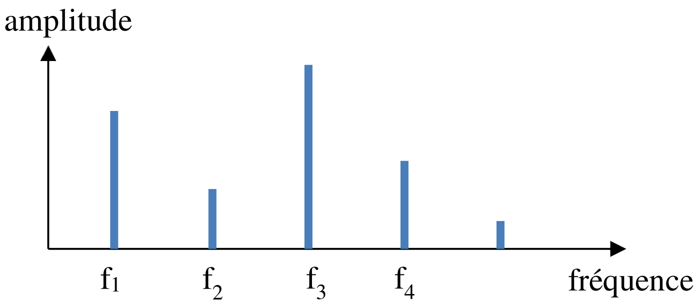
c-$p(0,t) = 0 \Rightarrow \cos\Phi = 0 \Rightarrow \Phi = -\frac{\pi}{2}$ par exemple

$p(L,t) = 0 \Rightarrow \cos(kL - \frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = p\pi$ p entier positif $\Rightarrow \frac{2\pi f}{c}L = p\pi$

Donc les seules ondes planes stationnaires possibles ont pour fréquence : $\boxed{f_p = p\frac{c}{2L}}$

d-Allure du spectre :

L'amplitude des harmoniques détermine <u>le timbre du son.</u>



e-On a : $\boxed{f^{(n)} = 2^{\frac{n}{12}} f^{(0)}}$

Donc : $440 = 2^{\frac{9}{12}} f_{do3} \Rightarrow f_{do3} = 262\text{ Hz}$; $f_{do2} = 131\text{ Hz}$; $f_{do1} = 65{,}5\text{ Hz}$

f-La fréquence fondamentale $f_{p=1} = \frac{c}{2L}$ diminue quand L augmente, donc c'est <u>le tuyau le plus grand</u> qui joue le son le plus grave, c'est-à-dire le fa_2.

On a : $f_{fa2} = 2^{\frac{5}{12}} f_{do2} = 175\text{ Hz}$ et $f_{fa2} = \frac{c}{2L_0}$ Donc : $\boxed{L_0 = \frac{c}{2f_{fa2}}}$ A.N : <u>$L_0 = 0{,}97$ m</u>

Puisque l'indice 0 est attribué au fa_2, on numérote les notes à partir du fa_2, donc : $f^{(n)} = 2^{\frac{n}{12}} f_{fa2}$

On a par ailleurs : $f_{fa2} = \frac{c}{2L_0}$ et $f^{(n)} = \frac{c}{2L_n}$

Donc : $\frac{c}{2L_n} = 2^{\frac{n}{12}} \frac{c}{2L_0}$ D'où : $L_n = \frac{L_0}{2^{\frac{n}{12}}}$

On compte sur la photo 19 tuyaux donc n varie de 0 à 18.

La longueur du plus petit tuyau est : $L_{18} = \frac{L_0}{2^{\frac{18}{12}}}$ A.N : <u>$L_{18} = 0{,}34$ m</u>
