

PHYSIQUE

Durée : 3 heures

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, le candidat doit alerter au plus tôt le surveillant qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.

Ce sujet comporte 13 pages numérotées de 1 à 13.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Ce sujet est composé de 3 parties indépendantes. La première partie modélise un phénomène optique atmosphérique connu sous le nom de « halo solaire ». La seconde partie aborde l'étude de la fonte de la glace des inlandsis de l'Antarctique et du Groënland. La troisième et dernière partie concerne quelques propriétés hydrodynamiques des glaciers. Un ensemble de données numériques utiles est disponible au début du sujet. En Annexe A, en fin de sujet, sont explicitées quelques fonctions du langage Python.

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent une prise d'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées par le candidat sur sa copie. L'évaluation des réponses à ces questions tient autant compte de la démarche entreprise que des résultats obtenus.

Toutes les réponses doivent être dûment justifiées.

Données numériques utiles

Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Indice optique de l'air	$n_a = 1,00$
Indice optique de la glace	$n_g = 1,31$
Masse volumique de la glace	$\rho_g = 0,917 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Masse volumique de l'eau liquide	$\rho_\ell = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Enthalpie massique de fusion de la glace	$\ell_f = 333,5 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
Capacité thermique massique de l'eau liquide	$c_\ell = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Rayon de la Terre	$R_T = 6\,400 \text{ km}$
Norme de l'accélération de la pesanteur	$g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

1. Modélisation du halo solaire

I. La réfraction de la lumière

1. On considère un milieu homogène, isotrope et transparent à la lumière. Exprimer l'indice optique n de ce milieu en fonction de la célérité v de la lumière dans ce milieu et de la célérité c de la lumière dans le vide.

On étudie la situation, représentée sur la figure 1 suivante, de la réfraction et de la réflexion de la lumière. Un rayon lumineux incident arrive sur un dioptre qui sépare deux milieux d'indices optiques n_1 et n_2 . On note θ_1 l'angle d'incidence du rayon incident, θ'_1 l'angle que le rayon réfléchi fait avec la normale au dioptre, et θ_2 l'angle que le rayon réfracté fait avec cette même normale. Les angles considérés sont algébriques; le sens positif, qui correspond au sens trigonométrique, est défini sur la figure 1 avec le symbole \oplus .

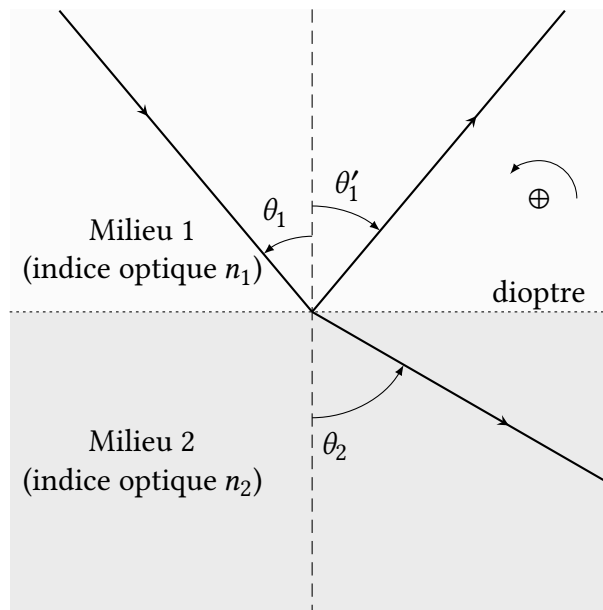


FIGURE 1 – Réflexion et réfraction de la lumière par un dioptre ($n_2 < n_1$). Les différents angles sont orientés : $\theta_1 > 0$, $\theta'_1 < 0$ et $\theta_2 > 0$. Le sens positif est le sens trigonométrique.

2. Rappeler les lois de la réflexion et de la réfraction de Snell-Descartes.
3. Montrer que, dans le cas où $n_2 < n_1$, si θ_1 est supérieur à une valeur θ_ℓ , l'énergie véhiculée par le rayon incident est totalement réfléchié par le dioptre. Nommer cette situation.
4. Exprimer θ_ℓ en fonction de n_1 et n_2 .
5. Dans le cas d'un dioptre séparant la glace (milieu 1) de l'air (milieu 2), calculer la valeur de θ_ℓ en degrés.

II. Le halo solaire

Le halo solaire, ou anthélie, est un phénomène optique atmosphérique qui ressemble à un arc-en-ciel circulaire (voir figure 2 à gauche). Il apparaît sous la forme d'un cercle coloré dont le soleil occupe le centre. L'objectif de cette sous-partie est la détermination du rayon angulaire du halo (qui représente l'angle au sommet du cône représenté sur la figure 2 à droite).

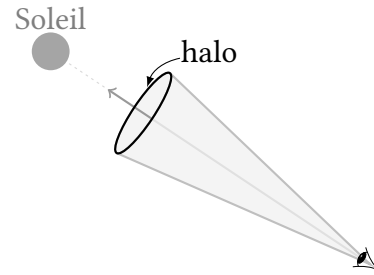


FIGURE 2 – Halo solaire. À gauche, photographie d'un halo solaire. À droite, géométrie du halo solaire : le halo apparaît sous la forme d'un cercle lumineux intense centré sur l'axe qui relie l'œil de l'observateur au Soleil.

Le halo est dû à la réfraction de la lumière issue du soleil par de petits cristaux de glace en forme de bâtonnets. Les plus petits de ces cristaux (dont la taille peut être inférieure à $20 \mu\text{m}$) ont un mouvement erratique provoqué par le choc des molécules qui constituent l'air ; ils ont donc toutes les orientations possibles dans l'espace. Puisqu'on ne s'intéresse qu'à la déviation des rayons lumineux, on peut modéliser la réfraction de la lumière issue du soleil par l'ensemble de ces cristaux par la réfraction de la lumière par un seul cristal en considérant un angle d'incidence variable.

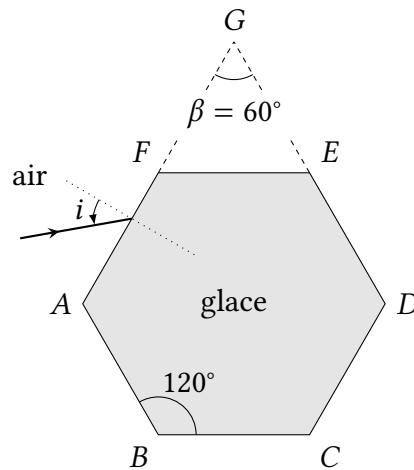


FIGURE 3 – Représentation de la section droite d'un cristal de glace et d'un rayon lumineux incident sur la face (AF) du cristal.

La figure 3 donne la représentation de la section droite d'un cristal de glace. Cette section présente la géométrie d'un hexagone régulier (ABCDEF). Un rayon lumineux incident, contenu dans le plan de cette section, atteint la face (AF) avec un angle d'incidence variable i . On étudie la déviation de ce rayon lumineux par le cristal.

6. Justifier que le rayon lumineux qui émerge du cristal ne peut pas sortir par la face (EF).
7. Justifier qu'un rayon lumineux qui émerge par la face (CD) est parallèle au rayon lumineux incident et n'est donc pas dévié par le cristal de glace.

On considère le rayon émergent par la face (DE). Les faces (AF) et (DE) sont analogues aux faces d'un prisme de sommet G, d'angle au sommet β égal à 60° et d'indice optique égal à celui de la glace, à savoir n_g (voir figure 4).

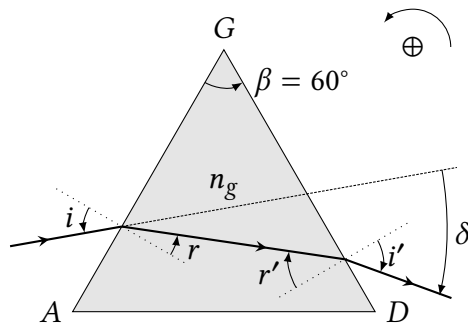


FIGURE 4 – Déviation du rayon lumineux incident par le prisme (ADG) d'indice optique n_g .

Les différents angles sont définis sur la figure 4. On les oriente selon la convention suivante : les angles qui correspondent à une rotation dans le sens trigonométrique sont comptés positivement. Le sens trigonométrique est rappelé par une flèche courbe sur la figure 4, associée au symbole \oplus .

On note δ l'angle qui mesure la déviation du rayon incident après sa traversée du prisme. Les différents angles sur la figure 4 ont les signes suivants : $i > 0$, $r > 0$, $i' < 0$, $r' < 0$ et $\delta < 0$.

8. Donner les relations qui lient i , r et n_g d'une part ; i' , r' et n_g d'autre part.

9. Établir que : $\beta = r - r'$ et que $\delta = i - r + r' - i'$.

10. La figure 5 montre les variations de la valeur absolue de la déviation $|\delta|$ en fonction de l'angle d'incidence. On constate l'existence d'une valeur minimale dont on admet qu'elle est obtenue lorsque $i = -i'$. En déduire que dans cette configuration :

$$r = \beta/2 \text{ et } \sin i = n_g \sin(\beta/2).$$

11. La figure 5 montre que la valeur minimale de $|\delta|$ est approximativement égale à 22° . Retrouver ce résultat par le calcul.

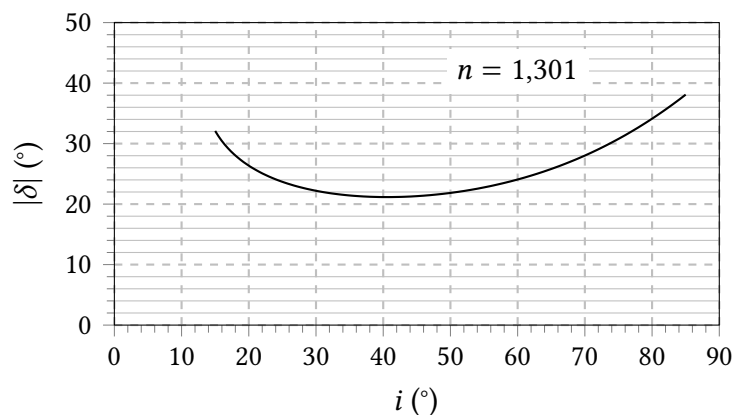


FIGURE 5 – Valeur absolue de la déviation du rayon lumineux en fonction de l'angle d'incidence.

12. Expliquer pourquoi l'observateur observe une accumulation de lumière (le halo solaire) dans la direction qui correspond à une ouverture angulaire de 22° autour de l'axe dirigé de son œil vers le Soleil.

13. L'indice optique de la glace est une fonction décroissante de la longueur d'onde. On observe que le halo solaire est irisé (l'irisation est la production des couleurs de l'arc-en-ciel par décomposition de la lumière du soleil) : de l'intérieur vers l'extérieur du halo, les couleurs observées varient du rouge au bleu. Préciser si les résultats établis précédemment sont en accord avec cette observation.

2. La fonte des inlandsis

Un inlandsis est un glacier de grande étendue qui se présente sous la forme d'une couche de glace dont l'épaisseur peut atteindre plusieurs milliers de mètres et qui recouvre le sol. Il n'existe sur Terre que deux inlandsis : celui du Groënland et celui de l'Antarctique. Ces deux inlandsis se prolongent vers la mer ou l'océan sous la forme de barrières de glace, dont se détachent les icebergs.

On propose d'abord dans cette partie d'estimer la hausse du niveau des océans sur Terre qui résulte de la fonte des inlandsis ou de la fonte des icebergs. Dans la dernière sous-partie est abordé l'aspect énergétique de la fusion de la glace, tel qu'il peut être étudié en séance de travaux pratiques.

I. Équilibre hydrostatique d'un glaçon dans l'eau liquide

Afin d'analyser l'éventuel impact de la fonte des icebergs sur l'élévation du niveau des océans, on propose d'étudier une situation modèle. On considère l'équilibre d'un glaçon, constitué d'eau pure, dans un récipient contenant de l'eau liquide (voir figure 6).

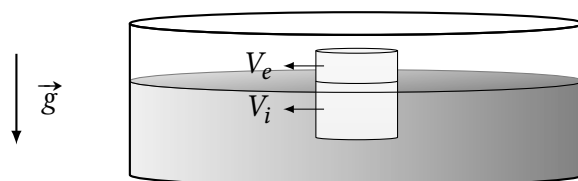


FIGURE 6 – Glaçon flottant dans un récipient rempli d'eau liquide.
Le volume émergé du glaçon est noté V_e , le volume immergé V_i .

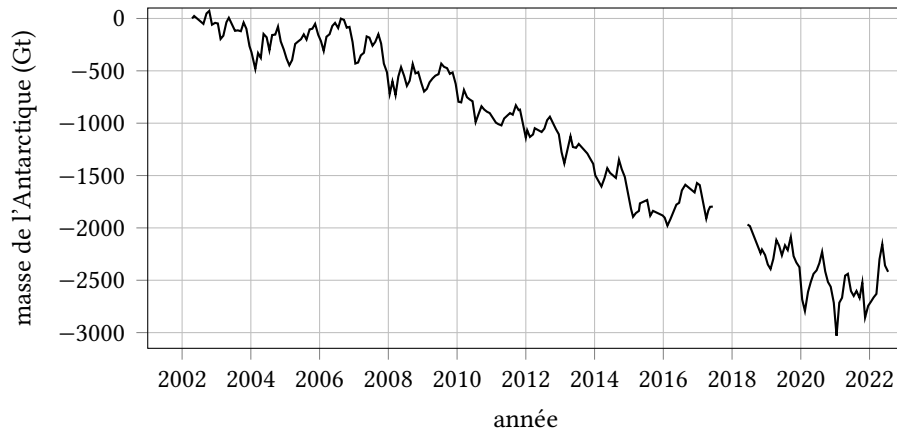
14. Donner l'expression de la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ que l'eau liquide exerce sur le glaçon en fonction du volume immergé V_i , de la masse volumique ρ_l de l'eau liquide et de l'accélération de la pesanteur \vec{g} .
15. Rappeler la nature des actions mécaniques à l'origine de la poussée d'Archimède.
16. On fait l'hypothèse que la poussée d'Archimède exercée par l'air est négligeable devant celle exercée par l'eau. Préciser néanmoins le sens de la poussée d'Archimède exercée par l'air sur le glaçon.
17. Exprimer le volume émergé V_e en fonction du volume immergé V_i et des masses volumiques de l'eau liquide ρ_l et de la glace ρ_g .

On repère le niveau de l'eau liquide dans le récipient juste après avoir déposé le glaçon et juste après la fonte de celui-ci.

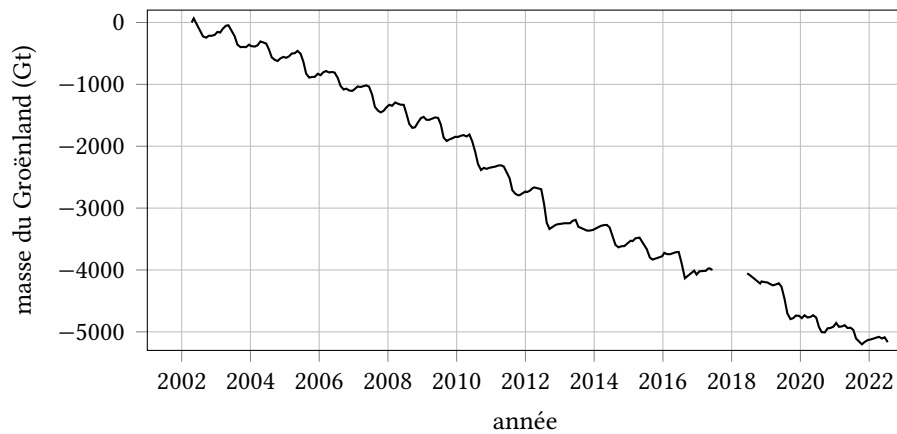
18. Justifier que le niveau d'eau liquide dans le récipient ne varie pas après la fonte du glaçon.
19. Préciser si ce résultat se maintient dans le cas où le glaçon constitué d'eau pure flotte dans de l'eau salée, de masse volumique supérieure à celle de l'eau pure.
20. Conclure quant à l'éventuelle contribution de la fonte des icebergs à l'élévation du niveau des océans.

II. Hausse du niveau des océans due à la fonte des inlandsis

La fonte de la glace qui constitue les inlandsis contribue à l'élévation du niveau des océans. Les variations de l'épaisseur moyenne des inlandsis se déduisent des mesures de leur altitude de surface par des satellites dédiés. La figure 7 représente les variations estimées de la masse des inlandsis de l'Antarctique et du Groënland depuis 2002.



(a) Antarctique



(b) Groënland

FIGURE 7 – Variations de la masse (exprimée en gigatonnes) des inlandsis de l’Antarctique [relevé du haut (a)] et du Groënland [relevé du bas (b)] au cours des vingt dernières années.
Source : <https://climate.nasa.gov/vital-signs/ice-sheets/>.

21. Les relevés de la figure 7 présentent des oscillations particulièrement visibles dans le cas du Groënland (graphique (b) à droite de la figure). Estimer grossièrement la période de ces oscillations et proposer une interprétation de leur origine.

22. Estimer la hausse du niveau des océans consécutive à la fonte des inlandsis du Groënland et de l’Antarctique pendant les vingt dernières années, en s’appuyant sur les données de la figure 7.

III. Détermination expérimentale de l’enthalpie massique de fusion de la glace

On propose dans cette sous-partie d’analyser les résultats expérimentaux obtenus par des étudiants à l’occasion d’une séance de travaux pratiques ayant pour but la détermination de la valeur de l’enthalpie massique de fusion de la glace.

23. Rappeler la définition de l’enthalpie massique de fusion de la glace.

La démarche expérimentale suivie pour déterminer l’enthalpie massique de fusion de la glace met en œuvre une technique calorimétrique particulière, la méthode des mélanges. Le protocole est détaillé dans le document 1, qui donne aussi toutes les indications utiles sur l’affichage des valeurs mesurées par les appareils utilisés.

Document 1 – Détermination de l'enthalpie massique de fusion de la glace par la méthode des mélanges

Protocole

1. Introduire une masse m_1 d'eau liquide connue (procéder à une pesée) dans le calorimètre.
2. Une fois l'équilibre thermique atteint, repérer la température θ_1 de l'eau (et donc du calorimètre).
3. Prélever 5 ou 6 glaçons et les placer dans un verre à pied et mesurer leur masse m_2 .
4. Attendre que les glaçons commencent à fondre et suivre leur température θ_2 .
5. Lorsque le thermomètre indique que la température des glaçons est $\theta_2 = 0^\circ\text{C}$, les introduire rapidement dans le calorimètre.
6. Une fois que les glaçons ont fondu et que l'équilibre thermique est atteint, repérer la température finale θ_f du système.

Résolution des appareils de mesure

- les masses sont mesurées à l'aide d'une balance électronique qui affiche la valeur de la masse au gramme près. On assimile la valeur mesurée d'une masse à une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur un intervalle de largeur égale à un gramme, centré sur la valeur affichée par la balance.
- les températures sont repérées à l'aide d'un thermomètre électronique qui mesure et affiche la valeur de la température au dixième de degré Celsius près. On assimile la valeur mesurée d'une température à une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur un intervalle de largeur égale à un dixième de degré Celsius, centré sur la valeur affichée par le thermomètre.

Les résultats obtenus par un groupe d'étudiants sont les suivants :

$$\begin{aligned}m_1 &= 250 \text{ g} & m_2 &= 32 \text{ g} \\ \theta_1 &= 18,7^\circ\text{C} & \theta_2 &= 0,0^\circ\text{C} \\ \theta_f &= 9,7^\circ\text{C}\end{aligned}$$

24. En supposant que le système {eau+glaçons} évolue de façon adiabatique, établir, à l'aide d'un bilan énergétique, la relation suivante :

$$\ell_f = -\frac{m_1}{m_2}c_\ell(\theta_f - \theta_1) - c_\ell(\theta_f - \theta_2).$$

Afin d'exploiter le résultat de leurs mesures et de prendre en compte les incertitudes de mesure, les étudiants rédigent et utilisent le programme python suivant :


```

1  ## importation des bibliothèques
2  import numpy as np
3  import numpy.random as rd
4
5  ## Constantes physiques
6  # Capacité thermique massique de l'eau liquide
7  c = 4.18E3
8
9  ## fonctions définies par l'utilisateur
10 def lf(m1,m2,Tf,Te,Tg):
11     '''
12     Renvoie la valeur de lf à partir de
13     - masse d'eau liquide m1 à température initiale Te (en K)
14     - masse de glace m2 à température initiale Tg (en K)
15     - température finale Tf (en K)
16     '''
17     return -(m1/m2)*c*(Tf-Te)-c*(Tf-Tg)
18
19 def calcul_lf(N,m1,m2,Tf,Te,Tg,delta_m,delta_T):
20     '''
21     Renvoie la valeur de l'enthalpie massique de fusion et calcule l'incertitude-type
22     par la méthode de Monte-Carlo, étant donné les valeurs des grandeurs utiles et
23     les largeurs de leurs intervalles de variation. Ces grandeurs sont considérées comme
24     des variables aléatoires avec une loi de probabilité uniforme sur ces intervalles de
25     variation.
26     '''
27     # Création d'un tableau vide contenant N termes
28     liste = np.empty(N)
29     # tirage aléatoire des valeurs des grandeurs (méthode de Monte-Carlo)
30     for i in range(N):
31         me_sim = m1 + (delta_m/2)*rd.uniform(-1,1)
32         mg_sim = m2 + (delta_m/2)*rd.uniform(-1,1)
33         liste[i] = lf(me_sim,mg_sim,Tf,Te,Tg)
34     return [np.mean(liste),np.std(liste)]
35 a=10000
36 resultat = calcul_lf(100000,0.250,0.032,282.7,291.7,273.0,0.001,0.1$)
37 print("Moyenne = %.2f kJ/kg ; écart-type = %.2f kJ/kg"%(resultat[0]/1000,resultat[1]/1000))

```

25. Expliquer pourquoi ce programme, bien que sa syntaxe soit correcte, ne fournit pas une valeur satisfaisante de l'incertitude-type sur la mesure de l'enthalpie massique de fusion de la glace.

Une fois l'erreur corrigée, le programme fournit le résultat suivant :

```

1 Moyenne = 253.38 kJ/kg ; écart-type = 3.03 kJ/kg

```

26. En s'appuyant sur le calcul d'un écart normalisé, comparer la valeur obtenue pour ℓ_f à la valeur de référence donnée dans le tableau de valeurs numériques en début du sujet (page 2).

27. Proposer une critique succincte du protocole suivi.

3. Quelques propriétés hydrodynamiques des glaciers

Du fait de leur plasticité, les glaciers s'écoulent lentement sous l'effet de la gravité avec une vitesse d'écoulement très variable selon la pente, la topographie du lit rocheux ou l'épaisseur de la glace. La vitesse moyenne est de l'ordre de quelques centimètres à quelques dizaines de centimètres par jour, le record revenant au glacier Kangerdlugssuaq dans le Groënland où la vitesse moyenne atteinte est de 14 kilomètres par an. Par ailleurs, les glaciers ne sont pas des masses compactes de glace. Ils sont traversés par un réseau hydrographique de canaux qui collectent et véhiculent l'eau liquide formée en surface.

Cette partie propose d'étudier, sur la base du modèle de Poiseuille, l'écoulement d'un glacier sous l'effet de la gravité et d'interpréter certains aspects du réseau hydrographique interne au glacier grâce au modèle de Roethlisberger.

I. L'écoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique

On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux newtonien de viscosité dynamique η , incompressible de masse volumique ρ , dans une conduite cylindrique horizontale de rayon R et d'axe de symétrie de révolution (Ox). Il règne dans la conduite un gradient horizontal de pression noté $\frac{dp}{dx}$ (avec $\frac{dp}{dx} < 0$), supposé indépendant de x . En un point M de l'écoulement, la vitesse d'écoulement du fluide s'écrit : $\vec{v}(M) = v(r)\vec{e}_x$, où r est la distance entre le point M et l'axe (Ox) et \vec{e}_x un vecteur unitaire orientant l'axe (Ox) (voir figure 8 ci-contre).

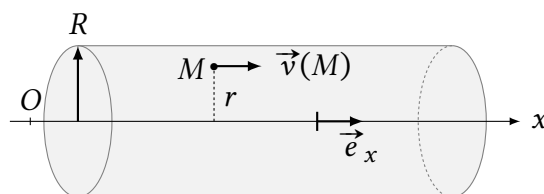


FIGURE 8 – Conduite cylindrique de rayon R et d'axe (Ox).

On admet que le fluide adhère aux parois de la conduite, ce qui se traduit par : $v(r = R) = 0$.

28. À l'aide d'un bilan de quantité de mouvement appliqué à un système fermé à définir, établir l'expression suivante de la vitesse d'écoulement, en prenant soin d'explicitier chaque étape du raisonnement :

$$\vec{v}(M) = \frac{r^2 - R^2}{4\eta} \frac{dp}{dx} \vec{e}_x \quad (1)$$

La force de viscosité \vec{f}_v que le fluide situé à l'extérieur du cylindre de rayon r , de longueur L et d'axe (Ox) exerce sur le fluide contenu dans ce cylindre s'écrit : $\vec{f}_v = 2\pi r L \eta \frac{dv}{dr} \vec{e}_x$.

29. En déduire l'expression du débit de volume Q en fonction de R , η et $\frac{dp}{dx}$.

30. En déduire la dimension de la viscosité dynamique η en fonction des dimensions fondamentales suivantes : longueur, masse et temps.

II. Modélisation de l'écoulement de la Mer de glace

Document 2 – L'écoulement de la Mer de glace

Source : (http://www.geoglaciaire.net/images/documents/Reynaud_Louis_Mer_de_glace.pdf) et WIKIPÉDIA

Les glaciers du massif du Mont Blanc s'étendent en France, Suisse et Italie ; ils couvrent quelque 150 km^2 (dont 110 km^2 en France). Le plus grand glacier des Alpes françaises est la Mer de glace : 12 km de longueur et 40 km^2 de superficie. La Mer de glace naît sur le plateau du Géant (de 3600 m à 2800 m d'altitude) et descend jusqu'à une altitude de 1500 m . Sa pente moyenne est voisine de 11° .

Document 2 (suite) – L'écoulement de la Mer de glace

La répartition des vitesses en surface et dans une section transversale du Glacier du Tacul (tronçon de la Mer de glace à l'aplomb du refuge de l'Envers des Aiguilles) est représentée sur la figure suivante.

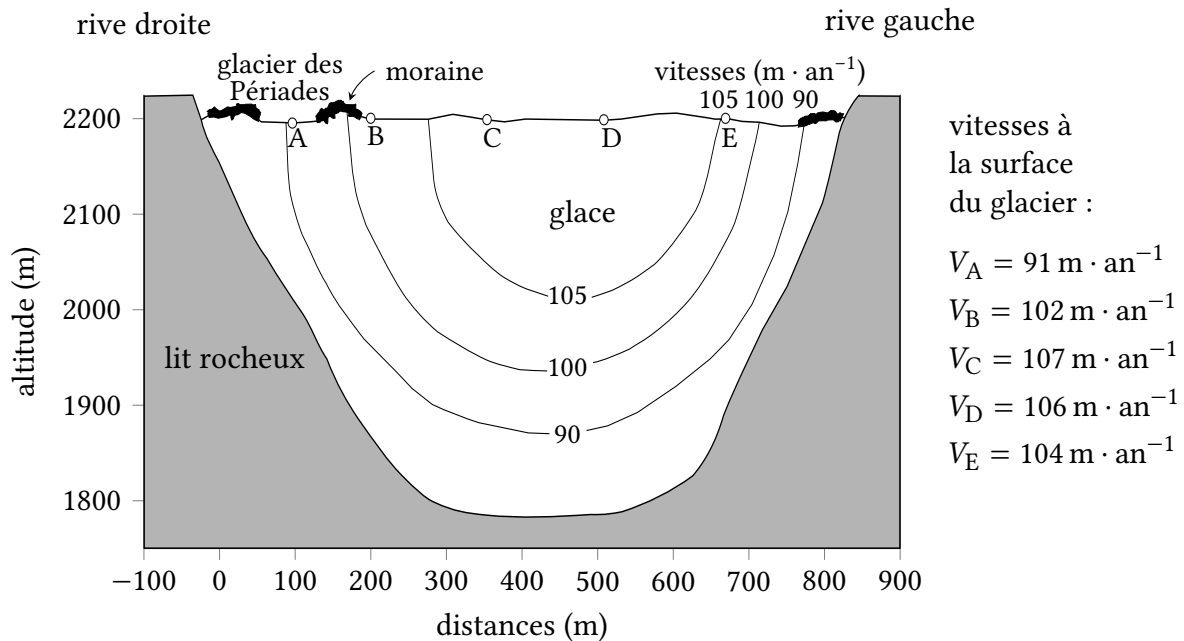


FIGURE 9 – Répartition des vitesses dans une section transversale du Glacier du Tacul.

La figure montre que la vitesse est pratiquement constante en surface au centre, par contre, elle varie très rapidement dans la centaine de mètres près des rives, pour tomber à quelques mètres par an de glissement sur les bords. En profondeur, les courbes d'égales vitesses peuvent être schématisées par des cercles concentriques.

On choisit de modéliser l'écoulement de la Mer de glace par l'écoulement de Poiseuille stationnaire d'un fluide visqueux newtonien incompressible s'écoulant dans la moitié inférieure d'une conduite cylindrique sous le seul effet de la gravité, ce qui impose de remplacer dans l'expression (1) de la vitesse d'écoulement $\frac{dp}{dx}$ par $-\rho_g g \sin \alpha$, où ρ_g est la masse volumique de la glace, g la norme de l'accélération de la pesanteur et α l'angle qui mesure la pente moyenne de la Mer de glace.

31. À partir d'une analyse de la figure 9, proposer au moins un argument en faveur et au moins un argument en défaveur de ce choix de modélisation de l'écoulement du glacier par un écoulement de Poiseuille.

32. En utilisant les données quantitatives disponibles dans le document 2 et en particulier sur la figure 9, proposer une estimation de l'ordre de grandeur de la viscosité dynamique de la glace. Comparer l'ordre de grandeur obtenu avec la valeur estimée usuelle de la viscosité de la glace de l'ordre de $10^{13} \text{Pa} \cdot \text{s}$. Commenter.

III. Modèle de Röthlisberger du drainage de l'eau liquide dans un glacier

L'eau liquide provenant de la fonte glaciaire et des précipitations est collectée en surface du glacier et pénètre en son sein. L'eau émerge au terminus du glacier par un petit nombre de conduits incisés à sa base. Il est tentant de supposer que ces conduits se prolongent dans la profondeur du glacier, le long de sa base.

Un conduit isolé rempli d'eau à l'intérieur du glacier a tendance à se refermer sous l'effet de la pression qu'exerce la glace environnante, à moins que l'écoulement de l'eau dans le conduit ne dissipe suffisamment d'énergie pour faire fondre les parois du conduit et le maintenir ainsi ouvert. Röthlisberger ^a a présenté la première analyse hydraulique et thermodynamique de l'écoulement stationnaire dans un canal de drainage, communément appelé canal de Röthlisberger.



FIGURE 10 – Canal de drainage au terminus du glacier de Pastaruri, Pérou (<https://www.swisseduc.ch/>).

^a. Röthlisberger, H. 1972. Water pressure in intra- and subglacial channels. *J. Glaciol.*, 11(62), 177-203.

On propose dans cette sous-partie d'interpréter la possibilité d'une arborescence des canaux de drainage. On considère un canal de drainage cylindrique horizontal, d'axe (Ox) , de rayon R , dans lequel s'écoule de l'eau, assimilée à un fluide newtonien incompressible, en régime stationnaire. La température et la pression de l'eau liquide en écoulement dans le canal dépendent de l'abscisse x . On note respectivement $T(x)$ et $p(x)$ les champs de température et de pression correspondants. L'écoulement de l'eau s'effectue dans le sens des x croissants sous l'effet du gradient de pression $\frac{dp}{dx}$. Le débit de volume associé est noté Q .

Röthlisberger fait l'hypothèse que la puissance dissipée par viscosité dans l'écoulement permet non seulement d'éroder le canal par fusion des parois de glace mais aussi de maintenir en tout point du canal l'équilibre thermodynamique entre la glace et l'eau liquide.

33. On considère le système constitué de la masse de glace de la paroi du canal comprise entre les rayons R et $R + dR$ et entre les abscisses x et $x + dx$. En raison de la dissipation d'énergie par frottement visqueux dans l'écoulement, cette masse fond pendant la durée dt .

Exprimer la variation d'enthalpie dH_g du système qui résulte de la fusion de la masse de glace considérée entre les instants t et $t + dt$ en fonction de R , dR , dx , ℓ_f (enthalpie massique de fusion de la glace) et ρ_g .

34. Identifier dans un diagramme pression-température les domaines de stabilité des phases liquide, gazeuse et solide de l'eau, et les délimiter en représentant leurs frontières. Placer le point triple Y et le point critique C sur le diagramme. Placer également un point E , représentatif d'un équilibre thermodynamique entre l'eau liquide et la glace.

35. On considère le système fermé constitué, à l'instant t , de l'eau qui se situe dans le volume du canal compris entre les abscisses x et $x + dx$ et de l'eau qui entre dans ce volume pendant la durée dt . Montrer, en explicitant soigneusement le raisonnement, que la variation d'enthalpie dH_t de ce système fermé, entre les instants t et $t + dt$ s'écrit :

$$dH_t = \rho_t Q c_t \frac{dT}{dx} dx dt. \quad (2)$$

L'hypothèse d'équilibre thermodynamique entre l'eau liquide et la glace impose des variations liées de la température et de la pression de l'eau liquide en écoulement dans le canal. Compte tenu de cette hypothèse, on admet que la relation (2) prend la forme suivante :

$$dH_\ell = c_\ell Q \frac{T(x) \rho_g - \rho_\ell}{\ell_f \rho_g} \frac{dp}{dx} dx dt. \quad (3)$$

36. Röthlisberger estime dans son modèle que : $dH_\ell = \frac{1}{2} dH_g$. En déduire l'expression de la vitesse d'érosion $\left(\frac{dR}{dt}\right)_{\text{érosion}}$ du canal en fonction de c_ℓ , Q , R , ℓ_f , $T(x)$, ρ_ℓ , ρ_g et $\frac{dp}{dx}$.

37. Contrôler le signe de $\left(\frac{dR}{dt}\right)_{\text{érosion}}$.

En écrivant que l'érosion compense l'effet contraire de rétrécissement dû à la pression de la glace environnante, Röthlisberger obtient que le gradient de pression $\frac{dp}{dx}$ dans le canal de drainage varie inversement proportionnellement à son rayon R .

On examine la situation de deux canaux parallèles voisins qui débouchent tous les deux au terminus du glacier où règne la pression atmosphérique. On suppose que l'un des canaux est caractérisé par un rayon supérieur à celui de l'autre canal.

38. En déduire comment se comparent les pressions dans les deux canaux à une même distance L de leur sortie.

39. Expliquer pourquoi Röthlisberger conclut que le canal de plus grand diamètre absorbe le canal de moindre diamètre à l'occasion d'une connexion entre les deux canaux et qu'un réseau arborescent de drainage doit donc se développer à la base du glacier.

Annexe A. Commandes Python

<code>numpy.empty(N)</code>	renvoie un tableau de taille égale à N, sans initialiser les éléments du tableau.
<code>numpy.mean(a)</code>	renvoie la moyenne arithmétique des éléments du tableau a.
<code>numpy.std(a)</code>	renvoie l'écart-type des éléments du tableau a.
<code>numpy.random.uniform(a, b)</code>	renvoie une réalisation (sous la forme d'un nombre de type float) d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$

FIN DU SUJET