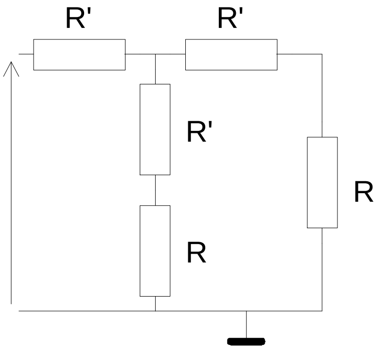
ADAPTATION D'IMPÉDANCES

1. RÉPARTITEUR TV



1.1. Exprimer la résistance d'entrée R_e du quadripôle ci-dessus en fonction des résistances R' et R.

1.2. Quelle relation doit il exister entre R et R' pour que la résistance d'entrée du quadripôle soit égale à R ?

1.3. La condition précédente étant réalisée, on alimente le quadripôle par un générateur sinusoïdal de f.e.m. E (valeur efficace) et de résistance interne R_g .

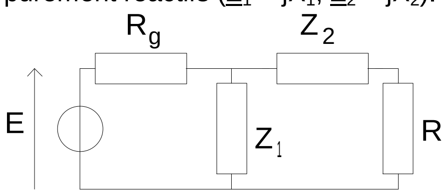
- Exprimer la puissance dissipée dans le quadripôle en fonction de E, R_g, et R.
- Pour quelle valeur de R cette puissance est-elle maximale ?
- Que vaut P_{max} ?
- Exprimer dans ce cas la puissance dissipée dans les résistances R en fonction de E et R.

1.4. Les résistances R représentent les résistances d'entrée de deux téléviseurs (R = 75 Ω) et le générateur une antenne de télévision (E = 1 mV, R_g = 75 Ω)

- Calculer R' pour avoir R_e = R
- Calculer la tension à l'entrée du quadripôle.
- Calculer la tension à l'entrée des téléviseurs.
- Calculer la puissance P reçue par le quadripôle.
- Calculer les puissances P_1 et P_2 reçues par chaque téléviseur.
- En déduire les pertes d'insertion du répartiteur (constitué des trois résistances R').
  pertes (en dB) = 10.log(P/($P_1 + P_2$)).

2. ADAPTATION D'IMPÉDANCE PAR QUADRIPÔLE RÉACTIF.

Pour adapter en impédance un générateur sinusoïdal de f.e.m. E (valeur efficace), de résistance interne R_g et une charge de résistance R on intercale un quadripôle constitué de deux éléments purement réactifs ($\underline{Z}_1 = jX_1$, $\underline{Z}_2 = jX_2$).



2.1. Exprimer l'impédance d'entrée $\underline{Z}_e$ du quadripôle adaptateur chargé par la résistance R en fonction de $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ et R.

2.2. On souhaite que la puissance transmise par le générateur au quadripôle chargé par R soit maximale. Donner, sans la démontrer, la relation liant alors R_g à $\underline{Z}_e$.
Expliquer pourquoi cela correspond également au maximum de puissance dissipée dans R.

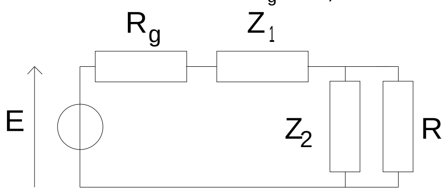
2.3. Exprimer dans ce cas R en fonction de X_1 et X_2 puis R_g en fonction de X_1, X_2 et R.

2.4. Montrer que les éléments réactifs doivent être de nature différente et que l'adaptation ne peut être réalisée que si R_g > R.

2.5. Exprimer X_1 et X_2 en fonction de R_g et R.

2.6. Le générateur est l'étage de sortie d'un émetteur de résistance interne R_g = 150 Ω et la résistance R, est la résistance de rayonnement de l'antenne : 75 Ω. La pulsation valant 10^7 rad/s, donner la nature et la valeur des éléments d'impédance $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ (2 inductances, 2 capacités).

2.7. Dans le cas où R_g < R, on réalise le montage ci-dessous.



Exprimer l'impédance d'entrée $\underline{Z}_e$ du quadripôle adaptateur chargé par la résistance R en fonction de $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ et R.

2.8. Exprimer, dans le cas où la puissance transmise au quadripôle est maximale, R en fonction de X_1 et X_2 puis R_g en fonction de X_1, X_2 et R.

2.9. Exprimer X_1 et X_2 en fonction de R_g et R.

2.10. Le générateur est l'étage de sortie d'un émetteur de résistance interne R_g = 150 Ω et la résistance R, est la résistance de rayonnement de l'antenne : 300 Ω. La pulsation valant 10^7 rad/s, donner la nature et la valeur des éléments d'impédance $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$. Choisir la meilleure combinaison de L et C.

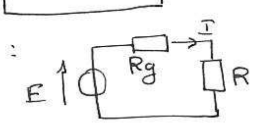
Adaptation d'impédances

1) Répartiteur TV

a) $R_e = R' + \frac{R+R'}{2} = \frac{3R'}{2} + \frac{R}{2}$

b) On veut $R_e = R_c = R \Rightarrow \frac{3R'}{2} + \frac{R}{2} = R \Rightarrow \boxed{R' = R/3}$

c) le schéma équivalent du montage est donc :



- $P_R = R I^2 = \boxed{R \frac{E_g^2}{(R+R_g)^2}}$

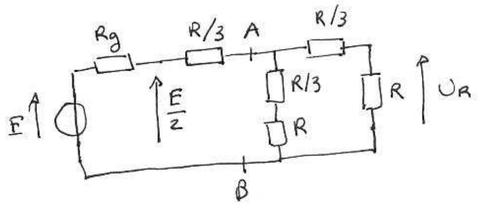
- $\frac{dP_R}{dR} = \frac{E_g^2}{(R+R_g)^4}\left[(R+R_g)^2 - 2R(R+R_g)\right]$

Lorsque cette dérivée s'annule, la puissance P_R passe par un extrêmum

$\frac{dP_R}{dR} = 0$ lorsque $\boxed{R = R_g}$

- $P_{Max} = \frac{R E_g^2}{(2R)^2} = \boxed{\frac{E_g^2}{4R}}$

d) $\boxed{R' = 25\,\Omega}$



La tension à l'entrée du quadripôle vaut donc $\boxed{E/2}$ (car $R = R_g$)

La résistance à droite de AB vaut $2R/3$

donc $U_{AB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{E}{2} = \frac{E}{3}$ et $\boxed{U_R = \frac{1}{4/3} \cdot \frac{E}{3} = \frac{E}{4}}$ (0,25 mV)

la puissance dissipée dans chaque résistance vaut

donc $P_1 = P_2 = \frac{(E/4)^2}{R} = \boxed{\frac{E^2}{16R}}$ 833 pW $\quad P_1 + P_2 = \frac{E^2}{8R}$ $\quad P = P_R$ (question c) $= 3,33$ nW

$\frac{P}{P_1 + P_2} = 2$

pertes $= 10 \log 2 = \boxed{3\,dB}$

2. Quadripôle réactif

a) $\underline{Z}e = \dfrac{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2+R)}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+R} = \dfrac{jX_1(R+jX_2)}{R+j(X_1+X_2)} = \dfrac{jX_1(R+jX_2)(R-j(X_1+X_2))}{R^2+(X_1+X_2)^2}$

$= \dfrac{RX_1^2}{R^2+(X_1+X_2)^2} + jX_1\dfrac{R^2+X_2(X_1+X_2)}{R^2+(X_1+X_2)^2}$

b) Il faut que $Rg = \mathcal{R}e(\underline{Z}e)$ et que $\mathcal{I}m(\underline{Z}e)=0$ car l'impédance interne du générateur est purement réelle.
Le quadripôle constitué d'éléments réactifs ne dissipe pas de puissance, la puissance est donc intégralement dissipée dans R.

c) Il faut donc que $R^2 = -X_2(X_1+X_2)$ $(\mathcal{I}m(\underline{Z}e)=0)$

d) $= -X_2^2 - X_1X_2$ $\boxed{R=\sqrt{-X_2(X_1+X_2)}}$ (1)

$\Rightarrow X_1X_2 = -(R^2+X_2^2)$ donc X_1 et X_2 sont de signes contraires c'est à dire de nature différente.

d'autre part : $\boxed{Rg = \dfrac{RX_1^2}{R^2+(X_1+X_2)^2}}$

En remplaçant R^2 par sa valeur en fonction de X_1, X_2 on obtient :

$\boxed{Rg = \dfrac{RX_1^2}{X_1^2+X_1X_2} = \dfrac{R}{1+\dfrac{X_2}{X_1}}}$ (2) avec $X_2X_1<0$ donc $\dfrac{X_2}{X_1}<0$

par conséquent $1+\dfrac{X_2}{X_1}<1$ et $\boxed{Rg>R}$

e) De 1 on tire $\boxed{\dfrac{X_2}{X_1} = \dfrac{R}{Rg}-1}$ (3)

En remplaçant X_1+X_2 par $-\dfrac{R^2}{X_2}$ (tiré de 1) dans (2) on obtient :

$Rg = \dfrac{RX_1}{-R^2/X_2} \Rightarrow \boxed{X_1X_2 = -RRg}$ (4)

le produit (3).(4) donne $\boxed{X_2 = \pm\sqrt{R(Rg-R)}}$

quotient (4)/(3) " $\boxed{X_1 = \dfrac{\pm Rg}{\sqrt{\dfrac{Rg}{R}-1}}}$

f) Deux possibilités $\underline{Z}_1$ inductif et $\underline{Z}_2$ capacitif $X_1 = \pm 150\Omega$
ou $\underline{Z}_1$ capacitif et $\underline{Z}_2$ inductif. $X_2 = \pm 75\Omega$

1er cas $L_1 = \dfrac{Rg}{\omega\sqrt{\frac{Rg}{R}-1}} = 15\mu H$ $C_2 = \dfrac{1}{\omega\sqrt{R(Rg-R)}} = 1{,}33nF$

2e cas $C_1 = \dfrac{\sqrt{Rg/R-1}}{\omega Rg} = 667pF$ $L_2 = \dfrac{\sqrt{R(Rg-R)}}{\omega} = 7{,}5\mu H$

2/3

g) $\underline{Z}e = \underline{Z}_1 + \frac{R\underline{Z}_2}{R+\underline{Z}_2} = jX_1 + \frac{jRX_2}{R+jX_2} = \frac{+RX_2^2}{R^2+X_2^2} + j\left(X_1 + \frac{R^2X_2}{R^2+X_2^2}\right)$

h)

- $\mathrm{Im}(\underline{Z}e)=0 \Rightarrow X_1 = \frac{-R^2X_2}{R^2+X_2^2} \Rightarrow \boxed{R^2 = \frac{-X_1X_2^2}{X_1+X_2} = \frac{-X_2^2}{1+X_2/X_1}}$ (5)

donc $\frac{X_2}{X_1} = -1 - \frac{X_2^2}{R^2} < 0$ X_1 et X_2 sont donc de nature différente

- $\boxed{R_g = \frac{RX_2^2}{R^2+X_2^2}}$ (6) or $\frac{X_2^2}{R^2} = -1 - \frac{X_2}{X_1} \Rightarrow \boxed{R_g = R\left(1+\frac{X_1}{X_2}\right)}$ $\boxed{R_g < R \text{ car } \frac{X_1}{X_2} < 0}$

i) (6) $\Rightarrow$ $\boxed{X_2 = \pm R\sqrt{\frac{R_g}{R-R_g}}}$ (7)

(5) $\Rightarrow 1 + \frac{X_2}{X_1} = \frac{-X_2^2}{R^2} = -\frac{R_g}{R-R_g} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = \frac{-R}{R-R_g} \Rightarrow X_1 = \frac{X_2(R-R_g)}{-R}$

$\boxed{X_1 = \pm\sqrt{R_g(R-R_g)}}$

j) $X_1 = \pm 150\,\Omega$ $X_2 = \mp 300\,\Omega$.

1er cas $L_1 = 15\,\mu H$ $C_2 = 333\,pF$

2e cas $C_1 = 667\,pF$ $L_2 = 30\,\mu H$

Le premier choix est le meilleur car à section de fil égale la première bobine aura une résistance plus faible.