ÉCHANTILLONNAGE

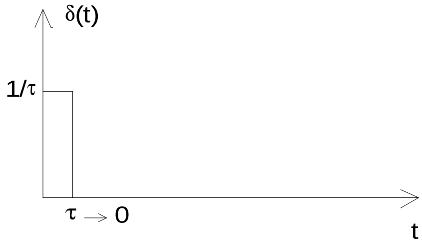
1. ÉCHANTILLONNAGE D'UN SIGNAL

1.1 Définition

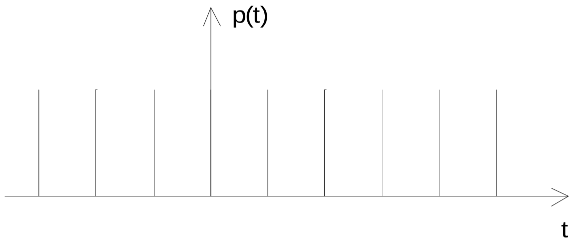
Échantillonner un signal consiste à le prélever à intervalle de temps réguliers, pendant une durée très courte.

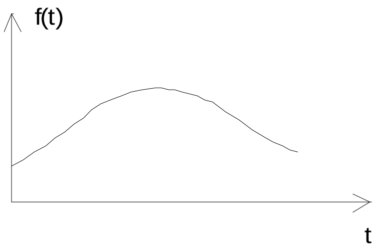
1.2 Peigne de Dirac

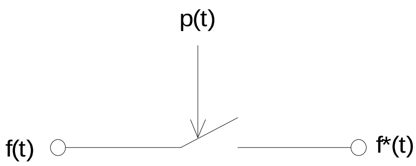
Un Dirac peut être assimilé à une impulsion de durée $\tau \rightarrow 0$ et d'amplitude $1/\tau$.

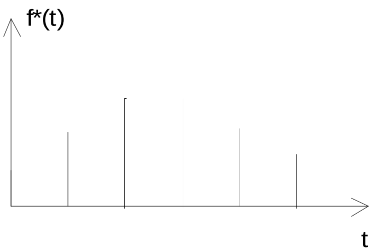


Un peigne de Dirac p(t) est constitué d'une suite d'impulsions de Dirac espacées de T_e, période d'échantillonnage.









Le signal échantillonné f*(t) se rapproche d'autant plus du signal analogique que la fréquence d'échantillonnage est élevée.
L'échantillonnage du signal f(t) correspond à son produit par le peigne de Dirac.

Le peigne de Dirac a pour expression : $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n.T_e)$

et le signal échantillonné : $f^*(t) = f(t).\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n.T_e)$

2. SPECTRE DU SIGNAL ÉCHANTILLONNÉ

2.1 Spectre d'amplitude du peigne de Dirac

Considérons tout d'abord un signal impulsionnel i(t), de durée à l'état haut τ, de période T_e et de hauteur E, donc de rapport cyclique $\alpha = \tau/T_e$.
Il a pour valeur moyenne $A_0 = \alpha.E$
Calculons les coefficients complexes de la décomposition en série de Fourier de ce signal :

$$\underline{C}_n = \frac{2}{T_e}\int_0^{T_e} i(t).e^{-jn\omega_e t}dt \qquad \text{avec} \qquad \omega_e = 2\pi/T_e$$

$$\underline{C}_n = \frac{2E}{T_e}\left[\frac{-e^{-jn\omega_e t}}{jn\omega_e}\right]_0^{\tau} = 2.A_0.e^{-jx}\,\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2jx} \qquad \text{avec } x = n.\omega_e.\tau/2$$

$$\underline{C}_n = 2.A_0.e^{-jx}.\mathrm{sinc}(x) \qquad \text{avec } \mathrm{sinc}(x) = \sin(x)/x \ \text{(sinus cardinal)}$$

Dans un peigne de Dirac, $\tau \to 0$, $E = 1/\tau$, donc $x \to 0$ et $\mathrm{sinc}(x) \to 1$: $A_0 = 1/T_e$ $C_n = 2.A_0 = 2/T_e$

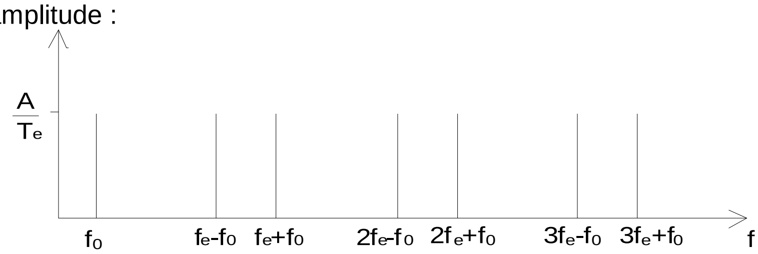
$$\boxed{p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_e) = \frac{1}{T_e} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{T_e}\cos(n\omega_e t)}$$

2.2 Échantillonnage d'une sinusoïde

Soit $f(t) = A.\cos(\omega_0.t)$

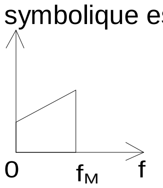
$$\boxed{\begin{aligned} f^*(t) &= A.\cos(\omega_0.t).\left[\frac{1}{T_e} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{T_e}\cos(n\omega_e t)\right] \\ &= \frac{A}{T_e}\left[\cos(\omega_0.t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos(n\omega_e - \omega_0)t + \cos(n\omega_e + \omega_0)t\right)\right] \end{aligned}}$$

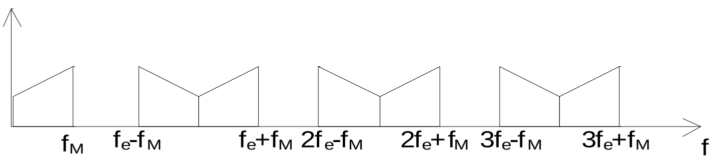
D'où le spectre d'amplitude :



2.3 Échantillonnage d'un signal quelconque

On considère maintenant un signal à spectre borné de fréquence maximale f_M dont le spectre symbolique est représenté ci-dessous.





spectre symbolique du signal   spectre symbolique du signal échantillonné

3. RECONSTITUTION DU SIGNAL ÉCHANTILLONNÉ

3.1 Théorème de Shannon

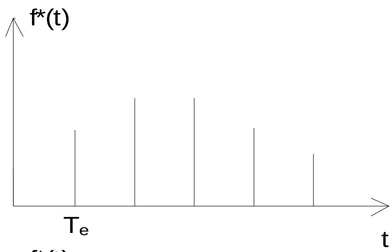
On peut remarquer sur le spectre ci-dessus que la fréquence d'échantillonnage doit être telle que $f_e - f_M > f_M$, soit $f_e > 2.f_M$, sinon il y a recouvrement des spectres, ceci constituant le théorème de Shannon.
La fréquence d'échantillonnage d'un signal doit être supérieure à la fréquence maximale du spectre du signal échantillonné.

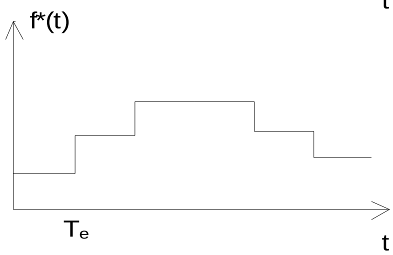
$$\boxed{F_e > 2.f_M}$$

On peut alors reconstituer le signal initial à l'aide d'un filtre passe-bas de fréquence de coupure égale à la fréquence maximale de son spectre.
Il est bien évident que la condition de Shannon est insuffisante, le filtre devant être parfait pour supprimer la fréquence $f_e - f_M$.
En pratique on choisit des fréquences d'échantillonnage : $\boxed{5.f_M < f_e < 25.f_M}$

3.2 Effet d'un échantillonnage-blocage

Un échantillonneur bloqueur (bloqueur d'ordre 0) mémorise (grâce à un condensateur) le signal échantillonné entre deux prélèvements. Le signal f(t) est donc multiplié par une impulsion unitaire $i_1(t)$ de durée T_e.





Sa transformée de Laplace $I_1(p) = \int_0^{T_e} e^{-pt}.dt = \dfrac{1 - e^{-pT_e}}{p}$

Le bloqueur transforme donc une impulsion de Dirac, de transformée de Laplace égale à 1, en une impulsion unitaire, de transformée de Laplace $I_1(p)$.

La transmittance isomorphe du bloqueur s'écrit donc : $\boxed{H(p) = \dfrac{I_1(p)}{1} = \dfrac{1 - e^{-pT_e}}{p}}$

Sa transmittance isochrone a pour expression : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1 - e^{-j\omega T_e}}{j\omega} = T_e.e^{-j\omega T_e/2}\dfrac{e^{j\omega T_e/2} - e^{-j\omega T_e/2}}{j\omega T_e/2}$

$$\underline{H}(j\omega) = T_e.e^{-j\omega T_e/2}\frac{\sin(\omega T_e/2)}{\omega T_e/2} = T_e.e^{-j\omega T_e/2}\frac{\sin(\pi f T_e)}{\pi f T_e}$$

Par rapport à l'échantillonnage simple, le blocage provoque une atténuation du signal en $\sin(\omega T_e/2)/(\omega T_e/2)$ et un retard de phase égal à $\omega T_e/2$.
Cela facilite le filtrage pour reconstituer le signal mais a pour inconvénient d'atténuer les composantes de plus hautes fréquences du spectre de f(t) (voir annexe) et de les retarder, d'où l'apparition d'une distorsion d'amplitude et d'une distorsion de phase.

4. TRANSFORMÉE EN Z

4.1 Définition

Soit f(t), une fonction causale et $f^*(t)$, la même fonction échantillonnée à la fréquence f_e.

$$f^*(t) = f(t).\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n.T_e) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n.T_e).\delta(t-n.T_e)$$

Sa transformée de Laplace s'écrit :

$$F^*(p) = \int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f(n.T_e).\delta(t-n.T_e).e^{-pt}dt$$

$$F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n.T_e)\int_0^{\infty}\delta(t-n.T_e).e^{-pt}.dt$$

La transformée de Laplace d'un Dirac étant égale à l'unité et celle d'un Dirac retardé de τ, à $e^{-p\tau}$,
en posant $\boxed{z = e^{pT_e}}$, on obtient la transformée en z de la fonction f(t) :

$$\boxed{Z[f(t)] = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n.T_e).e^{-npT_e} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n.T_e).z^{-n}}$$

4.2 Propriétés

4.2.1 Linéarité

$$\boxed{Z[a.f_1(t)+b.f_2(t)] = a.Z[f_1(t)]+b.Z[f_2(t)]}$$

4.2.2 Retard

Soit $f(t - k.T_e)$ nulle pour $t < k.T_e$, $\boxed{Z[f(t-k.T_e] = z^{-k}.Z[f(t)]}$

On retiendra qu'un retard de T_e se traduit par une multiplication par z^{-1}.

4.2.3 Translation complexe

$$Z[e^{p_0 t}.f(t)] = F[z.e^{-p_0.T_e}]$$

4.2.4 Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale

$$\boxed{\lim_{n\to 0} f(n.T_e) = \lim_{z\to\infty} F(z)} \qquad \boxed{\lim_{n\to\infty} f(n.T_e) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1}).F(z)}$$

4.3 Principales transformées en z

4.3.1 Échelon d'amplitude E : E.u(t)

$$\boxed{F(z) = \frac{z}{z-1}E}$$

4.3.2 Rampe de pente a : a.t.u(t)

$$\boxed{F(z) = a.T_e\frac{z}{(z-1)^2}}$$

4.3.3 Signal exponentiel : $A.e^{-at}.u(t)$

$$F(z) = A\,\frac{z}{z - e^{-aT_e}}$$

4.3.4 Signal sinusoïdal : $\sin(\omega_0 t).u(t)$

$$F(z) = \frac{z.\sin(\omega_0.T_e)}{z^2 - 2z.\cos(\omega_0.T_e) + 1}$$

4.3.5 Cosinusoïde : $\cos(\omega_0 t).u(t)$

$$F(z) = \frac{z.(z - \cos(\omega_0.T_e))}{z^2 - 2z.\cos(\omega_0.T_e) + 1}$$

4.3.6 Signal sinusoïdal amorti : $e^{-at}.\sin(\omega_0 t).u(t)$

$$F(z) = \frac{z.e^{-aTe}.\sin(\omega_0.T_e)}{z^2 - 2z.e^{-aTe}.\cos(\omega_0.T_e) + e^{-2aTe}}$$

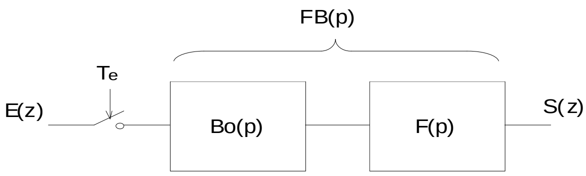
4.4 Fonction de transfert en z

Soit un système linéaire auquel on applique une impulsion de Dirac, sa réponse impulsionnelle est égale à la fonction de transfert isomorphe du système (car E(p) = 1).
Calculons sa fonction de transfert en z :

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{Z\left[s^*(t)\right]}{Z\left[e^*(t)\right]} = Z\left[h^*(t)\right]$$

La fonction de transfert en z d'un système linéaire est donc égale à la transformée en z de la réponse impulsionnelle.

Considérons un processus de transmittance isomorphe F(p) précédé d'un échantillonneur bloqueur avec $B_0(p) = \dfrac{1 - e^{-T_e p}}{p}$ et calculons la transmittance de l'ensemble bloqueur-processus FB(z).



S(z) = FB(z).E(z)

$$FB(z) = Z\left[\frac{(1 - e^{-T_e p})}{p}F(p)\right] = Z\left[\frac{F(p)}{p}\right] - Z\left[e^{-T_e p}.\frac{F(p)}{p}\right] = Z\left[\frac{F(p)}{p}\right] - z^{-1}.Z\left[\frac{F(p)}{p}\right]$$

$$FB(z) = (1 - z^{-1}).Z\left[\frac{F(p)}{p}\right]$$

4.5 Équation de récurrence

On l'appelle également équation aux différences ou algorithme, elle lie la sortie à l'instant $n.T_e$ à l'entrée à l'instant $(n-1).T_e$ et à la sortie aux instants $(n-1).T_e$, $(n-2).T_e$ etc…

Exemple : $h(t) = 1 - e^{-2t} \Rightarrow H(p) = \dfrac{2}{p.(p+2)}$ et $H(z) = \dfrac{z.(1 - e^{-2T_e})}{(z-1).(z - e^{-2T_e})}$

Si H(p) est une fraction rationnelle en p, H(z) sera une fraction rationnelle en z .

Si on choisit une période d'échantillonnage de 0,5s :

$$H(z) = \frac{0{,}632.z}{(z-1).(z-0{,}368)} = \frac{S(z)}{E(z)}$$ donc : $0{,}632.z^{-1}.E(z) = (1 - 1{,}368.z^{-1} + 0{,}368.z^{-2}).S(z)$

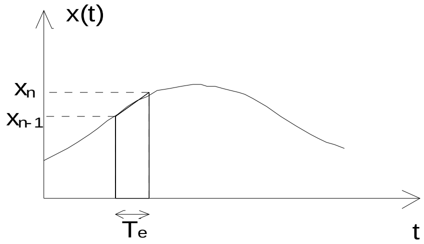
d'où l'équation de récurrence : $0{,}632.e(n-1) = s(n) - 1{,}368.s(n-1) + 0{,}368.s(n-2)$

4.6 Transformation bilinéaire

Elle permet le passage d'une transformée de Laplace en une transformée en z.
Elle utilise la méthode du trapèze pour calculer une intégrale.
Soit y(t), l'intégrale de la fonction x(t) :

$$y(t) = \int_0^t x(\tau).d\tau$$

Si l'on effectue cette intégration entre les instants $(n-1).T_e$ et $n.T_e$: $y_n - y_{n-1}$ = aire du trapèze défini ci-contre,
soit $y_n - y_{n-1} = (x_n + x_{n-1}).T_e/2$.



En passant à la transformée en z : $Y(z).(1 - z^{-1}) = X(z).(1 + z^{-1}).\ T_e/2$
On passe donc de la transformée en z d'un signal à la transformée en z de son intégrale, en multipliant la transformée en z du signal par : $\dfrac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\dfrac{T_e}{2}$

Or un intégration en Laplace correspond à une division par p, on aura donc la correspondance :

$\boxed{p \rightarrow \dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\dfrac{2}{T_e}}$ qui constitue la **transformation bilinéaire**.

La relation exacte étant $z = e^{pT_e}$, la transformation bilinéaire est identique à la relation exacte au deuxième ordre près. Elle s'en approche d'autant plus que la fréquence d'échantillonnage est élevée.

Annexe

Atténuation due au terme : $\left|\dfrac{\sin(\pi f T_e)}{\pi f T_e}\right|$