TRANSFORMÉE DE LAPLACE

1. DEFINITION

Soit f(t), une fonction du temps nulle pour t négatif et non nulle pour $t \geq 0$.
Sa transformée de Laplace est définie par :

$$\pounds(f(t)) = F(p) = \int_0^\infty f(t).e^{-pt}dt$$

2. PROPRIÉTÉS

- linéarité : $\lambda.f(t) + \mu.g(t) \quad \leftrightarrow \quad \lambda.F(p) + \mu.G(p)$
- retard temporel : $f(t-\tau) \quad \leftrightarrow \quad e^{-\tau p}.F(p)$
- retard fréquentiel : $f(t).e^{at} \quad \leftrightarrow \quad F(p-a)$
- dérivation : $f'(t) \quad \leftrightarrow \quad p.F(p) - f(0)$
- dérivation d'ordre n : $\dfrac{d^n f}{dt^n} \quad \leftrightarrow \quad p^n.F(p) - p^{n-1}.f(0) - \sum_{i=2}^{n} p^{n-i}\left(\dfrac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}\right)_0$
- intégration : $\int_0^t f(u).du \quad \leftrightarrow \quad F(p)/p$
- fonction périodique : $f(t+nT) = f(t) \quad \leftrightarrow \quad F(p) = \dfrac{1}{1-e^{-pt}}\int_0^T e^{-pt}.f(t).dt$

3. THEORÈMES DE LA VALEUR INITIALE ET DE LA VALEUR FINALE

On se souviendra que :

- $t \to 0$ correspond à $p \to \infty$: régime transitoire
  $t \to \infty$ correspond à $p \to 0$: régime permanent

- Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t\to 0} f(t) = f(0^+) = \lim_{p\to\infty} p.F(p)$$

- Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{p\to 0} p.F(p)$$

4. APPLICATION

Soit à résoudre l'équation différentielle : $\tau.y'(t) + y(t) = f(t)$ avec $y(0^+) = Y_0$
sa transformée de Laplace s'écrit : $\tau.[p.Y(p) - Y_0] + Y(p) = F(p)$
soit :

$$Y(p) = \frac{F(p)}{1+\tau.p} + \frac{\tau.Y_0}{1+\tau.p}$$

connaissant F(p), on en déduira Y(p) et finalement y(t).

5. DÉCOMPOSITION EN FRACTIONS SIMPLES

Lorsque la fonction de p est une fraction algébrique rationnelle, on la décompose en une somme de fractions simples à chacune desquelles correspond une transformée inverse donnée dans une table.

$S(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$ Les zéros du dénominateur s'appellent les pôles de S(p).

Exemple : $\dfrac{1}{(p+a).(p+b)} = \dfrac{A}{p+a} + \dfrac{B}{p+b}$

en réduisant au même dénominateur et en identifiant les deux membres de l'égalité, on obtient :
A+B = 0 et A.b + B.a = 1, donc : A = -B = 1/(b-a)

Cette méthode devient vite lourde lorsque le nombre de fractions simples augmente. On utilise alors les relations suivantes :

- si $p = p_1$ est un pôle d'ordre n, on aura les fractions simples suivantes :

$$\frac{A_n}{(p-p_1)^n} + \frac{A_{n-1}}{(p-p_1)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_1}{(p-p_1)}$$

avec :

$$A_n = \left[(p-p_1)^n \frac{N(p)}{D(p)}\right]_{p=p_1} = [F(p)]_{p=p_1}$$

$$A_{n-1} = \left[\frac{dF(p)}{dp}\right]_{p=p_1} \qquad A_{n-i} = \left[\frac{1}{i!}\frac{d^iF(p)}{dp^i}\right]_{p=p_1}$$

- si $p = p_2$ est un pôle simple, on aura des termes de la forme :

$\dfrac{A_0}{p}$ si $p_2 = 0$: pôle à l'origine ou bien $\dfrac{A_1}{p-p_2}$ si p_2 est un pôle quelconque

avec :

$$A_0 = \left[\frac{N(p)}{D'(p)}\right]_{p=0} \qquad A_1 = \left[\frac{N(p)}{D'(p)}\right]_{p=p_2} \qquad \text{et} \qquad D'(p) = \frac{dD(p)}{dp}$$

on peut également utiliser les relations suivantes :

$$A_0 = \left[p\frac{N(p)}{D(p)}\right]_{p=0} \qquad A_1 = \left[(p-p_2)\frac{N(p)}{D(p)}\right]_{p=p_2}$$

- si le dénominateur comporte des pôles complexes conjugués d'ordre n :

$p_1 = a - jb$ et $p_2 = a + jb$

on aura une somme : $\dfrac{A_np+B_n}{\left((p-a)^2+b^2\right)^n} + \dfrac{A_{n-1}p+B_{n-1}}{\left((p-a)^2+b^2\right)^{n-1}} + \ldots + \dfrac{A_1p+B_1}{\left((p-a)^2+b^2\right)}$

avec : $A_np_1 + B_n = \left[\left((p-a)^2+b^2\right)^n \dfrac{N(p)}{D(p)}\right]_{p=p_1} = [F(p)]_{p=p_1}$

$$A_{n-i}p_1 + B_{n-i} = \left[\frac{1}{i!}\frac{d^iF(p)}{dp^i}\right]_{p=p_1}$$

Exemples :

a) On soumet un circuit RC, dont le condensateur est initialement déchargé, à une rampe de tension de pente k. Donner l'équation de la réponse à cette excitation.

La transmittance de Laplace du circuit RC a pour expression :

$$T(p) = \frac{1}{1 + RCp}$$

La transformée de Laplace de l'excitation s'écrit :

$$E(p) = \frac{k}{p^2}$$

La transformée de Laplace de la sortie a donc pour expression :

$$S(p) = \frac{k}{p^2(\tau p + 1)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p + 1/\tau}$$

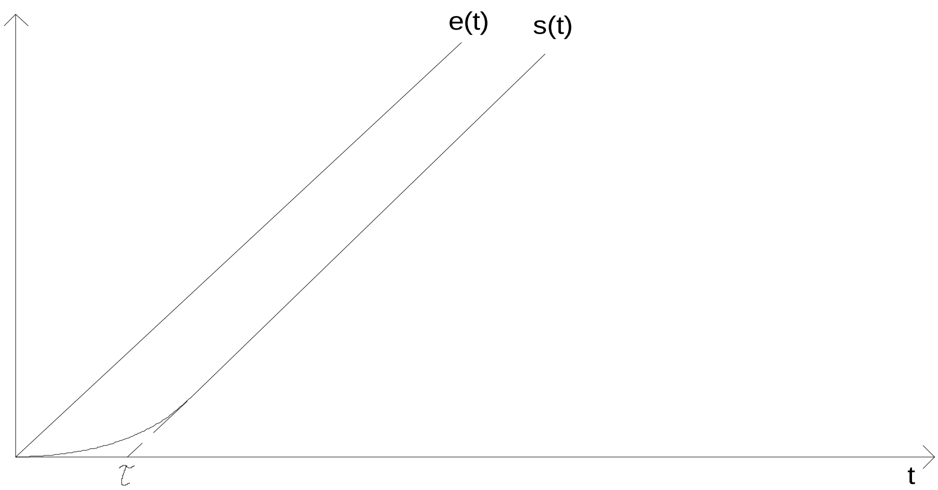
$$A = \left[(p - 0)^2 \frac{k}{p^2(\tau p + 1)} \right]_{p=0} = k \Rightarrow F(p) = \frac{1}{\tau p + 1}$$

$$B = \left[\frac{dF(p)}{dp} \right]_{p=0} = \left[\frac{-k\tau}{(\tau p + 1)^2} \right]_{p=0} = -k\tau$$

$$C = \left[\frac{k}{\tau p^2} \right]_{p=-1/\tau} = k\tau$$

donc : $S(p) = \dfrac{k}{p^2} - \dfrac{k\tau}{p} + \dfrac{k\tau}{p + 1/\tau}$

et : $s(t) = k.t - k.\tau + k.\tau.e^{-t/\tau} = k.\tau.e^{-t/\tau} + k.(t-\tau)$



Rq : si les conditions initiales ne sont pas nulles, il faut, à partir de l'équation S(p) = T(p).E(p), revenir à l'équation différentielle puis introduire les conditions initiales dans sa transformée de Laplace avant de déterminer s(t) (voir exercice sur les circuits du premier ordre).

b) Décomposer $S(p) = \dfrac{1}{p.\left(p^2+p+1\right).\left(p-1\right)^2}$ en fractions simples.

On écrira : $S(p) = \dfrac{A.p+B}{\left(p^2+p+1\right)} + \dfrac{C}{\left(p-1\right)^2} + \dfrac{D}{\left(p-1\right)} + \dfrac{E}{p}$

$$C = \left[\frac{1}{p.\left(p^2+p+1\right)}\right]_{p=1} = \frac{1}{3}$$

$$D = \left[\frac{d}{dp}\frac{1}{p.\left(p^2+p+1\right)}\right]_{p=1} = \left[\frac{-p.(2.p+1)-\left(p^2+p+1\right)}{\left(p.\left(p^2+p+1\right)\right)^2}\right]_{p=1} = -\frac{2}{3}$$

$$E = \left[\frac{1}{\left(p^2+p+1\right).\left(p-1\right)^2}\right]_{p=0} = 1$$

Pour trouver la valeur de A, on peut réduire au même dénominateur S(p) et remarquer que seuls A,D et E sont facteurs de p^4, donc A + D + E = 0 et A = 2/3 - 1= -1/3, ou bien on peut multiplier les deux membres de l'équation par p et faire tendre p vers l'infini, ce qui donne également A + D + E = 0.
Pour B on pourra remplacer p par une valeur simple, mais pas un pôle.
Par exemple, avec p = -1, on obtient B = 0.